Prova scritta - 19 Giugno 2019

Soluzione Esercizio 1

Per determinare l'espressione dell'accelerazione del sistema, dobbiamo inizialmente scrivere il secondo principio della dinamica. Scegliamo gli assi in modo che siano coerenti con il movimento verso il basso di $m3$.

$$\begin{aligned} -m_1 g + T_1 &= m_1 a \\ -m_2 g sen\alpha - T_1 + T_2 &= m_2 a \\ m_3 g - T_2 &= m_3 a \end{aligned} \tag{1}$$

Dalla prima e terza equazione ricaviamo le tensioni:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 a + m_1 g \\ T_2 &= m_3 g - m_3 a \end{aligned} \tag{2}$$

Sostituendo nell'equazione per m_2 otteniamo:

$$-m_2 g sen\alpha - m_1 a - m_1 g + m_3 g - m_3 a = m_2 a \tag{3}$$

Da cui ricaviamo:

$$a = \frac{m_3 - m_1 - m_2 g sen\alpha}{m_1 + m_2 + m_3} g = 7.5\ m/s^2 \tag{4}$$

Le tensioni invece saranno:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1 \left[2m_3 + m_2(1 - sen\alpha)\right]}{(m_1 + m_2 + m_3)} g = 5.19 \text{ N} \\ T_2 &= \frac{m_3 \left[2m_1 + m_2(1 + sen\alpha)\right]}{(m_1 + m_2 + m_3)} g = 11.41 \text{ N} \end{aligned} \tag{5}$$

Per ricavare la velocità dei blocchi basterà applicare le leggi del moto uniformemente accelerato. Se indichiamo con $\bar{t}$ il tempo in cui la massa m_2 ha percorso la distanza h lungo il piano, avremo:

$$\begin{aligned} v(\bar{t}) &= a\bar{t} \\ h &= \frac{1}{2} a\bar{t}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

Da quest'ultima ricaviamo:

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \tag{7}$$

Quindi infine avremo:

$$v(\bar{t}) = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{2h\,(m_3 - m_1 - m_2 sen\alpha)}{(m_1 + m_2 + m_3)}} = 2.73\ m/s \tag{8}$$

Soluzione Esercizio 2

Nella prima fase del problema, quando il corpo A sta scivolando lungo il profilo del cuneo, la componente x della quantità di moto si conserva, perché lungo questa direzione non agiscono forze esterne. Possiamo allora scrivere:

$$0 = MV + m_1 v \tag{9}$$

Da cui ricaviamo:

$$v = -\frac{M}{m_1} V \tag{10}$$

Poiché poi non ci sono attriti, e la reazione vincolare non compie lavoro dato che è istantaneamente ortogonale allo spostamento, si conserva l'energia meccanica del sistema:

$$m_1 g R = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} m_1 v^2 \tag{11}$$

Sostituendo l'espressione di v ricavata prima, otteniamo:

$$V = \sqrt{\frac{2 m_1^2 g R}{M(M + m_1)}} = 0.77 m/s^2 \tag{12}$$

La velocità del corpo di massa m_1 sarà quindi:

$$v = -3.08 m/s^2 \tag{13}$$

dove il segno negativo indica che il corpo e il cuneo procederanno in direzioni opposte. Consideriamo ora la seconda parte del problema, quando il corpo di massa m_1 urta con l'asta di massa m_2. Se scelgo come polo il centro dell'asta, il momento angolare del sistema si conserva, poiché l'unica forza esterna (la reazione vincolare sviluppata nel perno) avrà momento nullo. Scegliendo l'asse z come uscente dal foglio, possiamo allora scrivere:

$$L_{ini} = L_{fin} \tag{14}$$

dove:

$$\begin{aligned} L_{ini} &= \frac{l}{2} m_1 v \\ L_{fin} &= -\frac{l}{2} m_1 v' + I\omega \end{aligned} \tag{15}$$

dove I è il momento di inerzia dell'asta rispetto al suo centro, ovvero $I = 1/12 \ m_2 \ l^2 = 0.65 \ kg \ m^2$. Eguagliando i due momenti angolari ricaviamo:

$$\omega = \frac{l/2 \ m_1 v + l/2 m_1 v'}{1/12 \ m_2 \ l^2} = 1.48 \ rad/s \tag{16}$$

Soluzione Esercizio 3

La trasformazione che subisce il gas a causa della presenza della massa M è irreversibile (avviene molto velocemente) e isoterma, poiché il gas è sempre in contatto con la sorgente a temperatura T_0. Quando viene raggiunto un nuovo equilibrio, la pressione esterna che agisce sul pistone sarà data da:

$$P = P_0 + \frac{Mg}{S} \tag{17}$$

dove S è la sezione del pistone, da ricavare. Quest'ultima sarà certamente legata al volume del gas:

$$\begin{aligned} V_0 &= Sh_0 \\ V &= Sh' = S(h_0 - h) \end{aligned} \tag{18}$$

dove h_0 è l'altezza iniziale del pistone e h' quella finale- Dall'equazione di stato dei gas perfetti posso ricavare il volume iniziale del gas:

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0} = Sh_0 \tag{19}$$

E analogamente per il volume finale:

$$PV = nRT_0 \tag{20}$$

da cui ricaviamo:

$$\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) S(h_0 - h) = nRT_0 \tag{21}$$

Abbiamo ottenuto dunque due equazioni nelle due incognite S e h_0. Ricavando h_0 nella prima equazione e sostituendola nell'altra, ricaviamo un'equazione di secondo grado per S:

$$P_0 hS^2 + MghS - \frac{MgRT_0}{P_0} = 0 \tag{22}$$

la cui unica soluzione accettabile è:

$$S = 4 \times 10^{-2} m^2 \tag{23}$$

La pressione finale agente sul gas sarà allora:

$$P = P_0 + \frac{Mg}{S} = 2.4 \times 10^9 \text{ Pa} \tag{24}$$

Per ricavare la quantità di calore scambiato possiamo applicare il primo principio della termodinamica; la variazione di energia interna sarà nulla, essendo la trasformazione un'isoterma:

$$Q - L = \Delta U \tag{25}$$

da cui:

$$Q = L = \int_{iniziale}^{finale} PdV = \int_{iniziale}^{finale} P_{ext}\, dV = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V - V_0) = -500J \tag{26}$$

La variazione di entropia dell'Universo sarà data da:

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorgente} \tag{27}$$

dove:

$$\Delta S_{gas} = nc_V ln\frac{T_0}{T_0} + nRln\frac{V}{V_0} = nRln\frac{V}{V_0} = -1.85\ J/K \tag{28}$$

mentre per la sorgente:

$$\Delta S_{sorgente} = \int_{iniziale}^{finale} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_0}\int_{iniziale}^{finale} dQ = -\frac{Q}{T_0} = 2.08\ J/K \tag{29}$$

Infine avremo:

$$\Delta S_{univ} = 0.23\ J/K \tag{30}$$