

Fisica della Materia Condensata

Prof. Paola Gallo

Soluzioni della prova di esame del I appello - 30 Gennaio 2017

Esercizio 1

Due cristalli monoatomici sono studiati col metodo delle polveri. Un campione cristallizza nel diamante e l'altro nel cubo semplice. Il lato della cella cubica di entrambi i reticoli è $a = 5.5 \text{ \AA}$.

1. Calcolare i moduli dei tre vettori $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$ di reticolo reciproco più corti per entrambi i reticoli.
2. Calcolare gli angoli ai quali vengono osservati i primi tre anelli di diffrazione per entrambi i reticoli, sapendo che $\lambda = 2 \text{ \AA}$.
3. Calcolare la *packing fraction* di entrambi i reticoli, motivando i passaggi.

Soluzione

punto 1

I moduli dei tre vettori più corti sono:

Reticolo sc:

$$\begin{aligned} \vec{G}_1 = \vec{g}_1 &= (100) && \text{lato del cubo} \\ \vec{G}_2 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 &= (110) && \text{diagonale della faccia} \\ \vec{G}_3 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 &= (111) && \text{diagonale del cubo} \end{aligned} \quad (1)$$

$$G_1 = \frac{2\pi}{a} = 1.142 \text{ \AA}^{-1}$$

$$G_2 = \frac{2\pi}{a} \sqrt{2} = 1.616 \text{ \AA}^{-1}$$

$$G_3 = \frac{2\pi}{a} \sqrt{3} = 1.979 \text{ \AA}^{-1}$$

Reticolo del diamante (*fcc*+base nello spazio diretto e *bcc* nello spazio reciproco):

$$\vec{G}_1 = \frac{4\pi}{a} \left(\frac{\hat{x}}{2} + \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{z}}{2} \right) = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = (111) \quad \text{centro cubo}$$

$$\vec{G}_2 = \frac{4\pi}{a} \hat{x} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = (110) \quad \text{lato del cubo}$$

$$\vec{G}_3 = \frac{4\pi}{a} (\hat{x} + \hat{y}) = \vec{g}_2 + \vec{g}_2 + 2\vec{g}_3 = (112) \quad \text{diagonale della faccia}$$

$$G_1 = \frac{2\pi}{a} \sqrt{3} = G_3^{\text{sc}} = 1.979 \text{ \AA}^{-1}$$

$$G_2 = \frac{4\pi}{a} = 2.285 \text{ \AA}^{-1}$$

$$G_3 = \frac{4\pi}{a} \sqrt{2} = 3.231 \text{ \AA}^{-1}$$

punto 2

La posizione θ_i dell'anello di diffrazione è legata al modulo del vettore di reticolo reciproco G_i tramite la relazione:

$$G_i = 2k \sin(\theta_i/2) = \frac{4\pi}{\lambda} \sin(\theta_i/2)$$

Nel cristallo monoatomico con reticolo *sc* non ci sono estinzioni, dunque i primi tre anelli si osservano ordinatamente per i tre più corti vettori di reticolo reciproco:

$$\theta_1 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda G_1}{4\pi} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda}{2a} \right) = 20.95^\circ$$

$$\theta_2 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda G_2}{4\pi} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}a} \right) = 29.80^\circ$$

$$\theta_3 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda G_3}{4\pi} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}\lambda}{2a} \right) = 36.71^\circ$$

Nel reticolo del diamante, la presenza di una base atomica costituita da due atomi uguali può far annullare il fattore di struttura $F(\vec{G})$ per qualche vettore di reticolo reciproco, pertanto è necessario controllare le estinzioni del reticolo. $F(\vec{G})$ nel diamante si scrive come (vedi es. 8 della raccolta della diffrazione per i passaggi):

$$F(\vec{G})^{\text{DIA}} = Nf \left(1 + e^{-i\frac{\pi}{2}(h+k+l)} \right)$$

Per i primi tre vettori si ha:

$$F(\vec{G}_1) \neq 0$$

$$F(\vec{G}_2) = 0$$

$$F(\vec{G}_3) \neq 0$$

Pertanto il primo anello è associato a G_1 ($\theta_1 \leftrightarrow G_1$), il secondo anello a G_3 ($\theta_2 \leftrightarrow G_3$).

Per trovare la posizione del terzo anello bisogna controllare il vettore \vec{G}_4 :

$$\vec{G}_4 = \frac{4\pi}{a} \left(3\frac{\hat{x}}{2} + \frac{\hat{y}}{2} + \frac{\hat{z}}{2} \right) = \vec{g}_1 + 2\vec{g}_2 + 2\vec{g}_3 = (122) \quad \text{centro di un cubo non adiacente all'origine}$$

per il quale risulta $F(\vec{G}_4) \neq 0$, pertanto il terzo anello è associato a $G_4 = \frac{2\pi}{a}\sqrt{11}$.

Le posizioni dei tre anelli sono dunque:

$$\theta_1 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda G_1}{4\pi} \right) = \theta_1^{sc} = 36.71^\circ$$

$$\theta_2 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda G_3}{4\pi} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}\lambda}{a} \right) = 61.90^\circ$$

$$\theta_3 = 2 \arcsin \left(\frac{\lambda G_4}{4\pi} \right) = 2 \arcsin \left(\frac{\sqrt{11}\lambda}{2a} \right) = 74.18^\circ$$

punto 3

La *packing fraction* (*pf*) di un reticolo è la frazione massima del volume della cella cristallina che può essere occupata dagli atomi e si calcola ponendo sui nodi del reticolo sfere dure di raggio R_{\max} affinché due sfere prime vicine si tocchino ma non si compenetrino. La *pf* si può poi calcolare come volume occupato dalle sfere internamente alla cella unitaria sul volume della cella unitaria.

Per il reticolo dell'*sc* $R_{\max} = a/2$ e (vedi es. 8 raccolta esercizi sui reticoli cristallini):

$$pf^{(sc)} = \frac{V_{occ}}{V_{cella}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_{\max}^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 52\%$$

Per il reticolo del diamante si ha (vedi es 10 raccolta esercizi sui reticoli cristallini):

$$R_{max} = \frac{d_{nn}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a \quad (2)$$

Nella cella ci sono 8 atomi, per cui si ha che il *packing factor* è:

$$pf^{(DIA)} = \frac{8 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{8} a \right)^3}{a^3} = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi \approx 34\% \quad (3)$$

Esercizio 2

Un solido monoatomico cristallizza nella struttura cubica a facce centrate, con temperatura di Debye $\Theta_D = 353$ K. La densità di massa del cristallo è $\rho = 8740$ kg/m³ e la velocità del suono vale $v_s = 2860$ m/s. Assumendo che ognuna delle branche acustiche abbia la forma:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4C}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right),$$

determinare:

1. la massa degli atomi che formano il cristallo,
2. la costante di forza C ,
3. la capacità termica per unità di massa a $T = 800$ K.
4. Noto che il contributo reticolare all'energia interna per unità di massa si può scrivere come $u(T) = \alpha T^4$ [J/kg] nel limite di basse temperature, determinare la costante α .

Soluzione

punto 1

Indichiamo con M, N e V la massa, il numero di atomi ed il volume totali del solido e con $n_{\text{at}} = N/V$ la sua densità atomica. Per l'fcc $n_{\text{at}} = 4/a^3$. Indichiamo invece con m la massa dell'atomo. Si ha dunque:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Nm}{V} = \frac{N}{V} m = n_{\text{at}} m$$

da cui:

$$m = \frac{\rho}{n_{\text{at}}}$$

Inoltre il vettore d'onda di Debye, $q_D = \sqrt[3]{6\pi^2 n_{\text{at}}}$, è legato alla temperatura di Debye tramite la relazione: $k_B \Theta_D = \hbar v_s q_D$.

Quindi si ha:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\rho}{n_{\text{at}}} = \frac{6\pi^2 \rho}{q_D^3} \frac{\rho}{n_{\text{at}}} = 6\pi^2 \rho \left(\frac{\hbar v_s}{k_B \Theta_D} \right)^3 \\ &= 6\pi^2 \cdot 8740 \text{ kg/m}^3 \left(\frac{1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J s } 2860 \text{ m/s}}{1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 353 \text{ K}} \right)^3 \\ &= 1.226 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \end{aligned}$$

punto 2

La velocità del suono è:

$$v_s = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=0} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4C}{m}} = a \sqrt{\frac{C}{m}}$$

La costante reticolare vale:

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{n_{\text{at}}}} = \sqrt[3]{\frac{4m}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1.226 \cdot 10^{-25} \text{ kg}}{8740 \text{ kg/m}^3}} = 3.83 \text{ \AA}$$

La costante di forza risulta dunque:

$$C = \frac{v_s^2}{a^2} m = \left(\frac{2860 \text{ m/s}}{3.83 \cdot 10^{-10} \text{ m}} \right)^2 \cdot 1.226 \cdot 10^{-25} \text{ kg} = 6.84 \text{ N/m}$$

punto 3

A $T = 800 \text{ K}$ ($\gg \Theta_D$) vale il limite classico. Con un solo atomo per cella si hanno solo le tre branche acustiche, quindi la capacità termica per unità di massa considerando i $3N$ modi vibrazionali è:

$$c_v(800\text{K}) = 3 \frac{N}{M} k_B = 3 \frac{1}{m} k_B = \frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}}{1.226 \cdot 10^{-25} \text{ kg}} = 337.7 \text{ J/(kg K)}$$

punto 4

Derivando il contributo vibrazione all'energia si ottiene la capacità termica:

$$c_v(T) = \frac{\partial u}{\partial T} = 4\alpha T^3$$

Dal confronto di questa formula con quella del modello di Debye:

$$c_v(T) = \frac{12}{5} \pi^4 \frac{1}{m} k_b \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^3$$

risulta:

$$\alpha = \frac{3}{5} \frac{\pi^4}{m} k_b \left(\frac{1}{\Theta_D} \right)^3 = \frac{3}{5} \frac{\pi^4}{1.226 \cdot 10^{-25} \text{ kg}} \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \left(\frac{1}{353 \text{ K}} \right)^3 = 1.496 \cdot 10^{-4} \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-4}$$

Esercizio 3

Considerate un reticolo cubico di costante reticolare $a = 2 \text{ \AA}$.

1. Scrivere la forma esplicita delle bande $E_{p_x}(\vec{k})$ e $E_{p_z}(\vec{k})$ risultanti nell'approssimazione a *tight binding* a primi vicini da funzioni di tipo p_x e di tipo p_z . Si trascurino le interazioni $p_x - p_z$. Utilizzare la formula:

$$E_i(\vec{k}) = E_{0i} - \sum_{\vec{R}} \gamma_i(R) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}} \quad i = p_x, p_z$$

dove \vec{R} indica la posizione dei primi vicini e γ_i é l'integrale di sovrapposizione (considerare $\gamma_i(R) = \gamma_i(-R)$).

2. Fare un grafico delle due bande nella direzione (100).

Dati : $E_{0p_x} = E_{0p_z} = 2 \text{ eV}$, $|\gamma_{p_x,x}| = |\gamma_{p_z,z}| = 0.5 \text{ eV}$, il modulo di tutti gli altri integrali di sovrapposizione fra primi vicini vale $|\gamma| = 0.4 \text{ eV}$.

Considerate ora un cristallo unidimensionale con la struttura a bande appena disegnata (ovvero considerare le due bande lungo la direzione (100)), il cristallo è bivalente.

3. Determinare quali sono gli stati occupati specificando i valori del momento k e il tipo di banda (p_x e/o p_z) degli stati occupati, e trovare l'energia di Fermi E_F di questo cristallo unidimensionale.
4. Specificare il comportamento della catena a temperatura nulla e a un $k_B T$ piccolo quanto si vuole. Motivare la risposta.
5. Calcolare la massa e la velocità degli elettroni che si trovano sul massimo della banda E_{p_x} .

Soluzione

punto 1

Per orbitali di tipo p_x , gli integrali hanno i seguenti segni: $\gamma_{p_x,x} < 0$, $\gamma_{p_x,y} > 0$, $\gamma_{p_x,z} > 0$.

Per orbitali di tipo p_z , gli integrali hanno i seguenti segni: $\gamma_{p_z,x} > 0$, $\gamma_{p_z,y} > 0$, $\gamma_{p_z,z} < 0$.

Gli orbitali p_i hanno cioè sovrapposizione negativa solo lungo la direzione in cui si sviluppano i lobi.

Nel reticolo *sc* i primi vicini sono 6 e sono indicati dai vettori $\vec{R} = (\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm a, 0)$, $(0, 0, \pm a)$. Le due bande risultano dunque:

$$\begin{aligned} E_{p_x}(\vec{k}) &= E_{0p_x} - 2\gamma_{p_x,x} \cos(k_x a) - 2\gamma_{p_x,y} \cos(k_y a) - 2\gamma_{p_x,z} \cos(k_z a) \\ &= E_{0p_x} + 2|\gamma_{p_x,x}| \cos(k_x a) - 2|\gamma| [\cos(k_y a) + \cos(k_z a)] \\ &= 2 + \cos(k_x a) - 0.8 [\cos(k_y a) + \cos(k_z a)] \quad [\text{eV}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{p_z}(\vec{k}) &= E_{0p_z} - 2\gamma_{p_z,x} \cos(k_x a) - 2\gamma_{p_z,y} \cos(k_y a) - 2\gamma_{p_z,z} \cos(k_z a) \\ &= E_{0p_z} - 2|\gamma| [\cos(k_x a) + \cos(k_y a)] + 2|\gamma_{p_z,z}| \cos(k_z a) \\ &= 2 - 0.8 [\cos(k_x a) + \cos(k_y a)] + \cos(k_z a) \quad [\text{eV}] \end{aligned}$$

punto 2

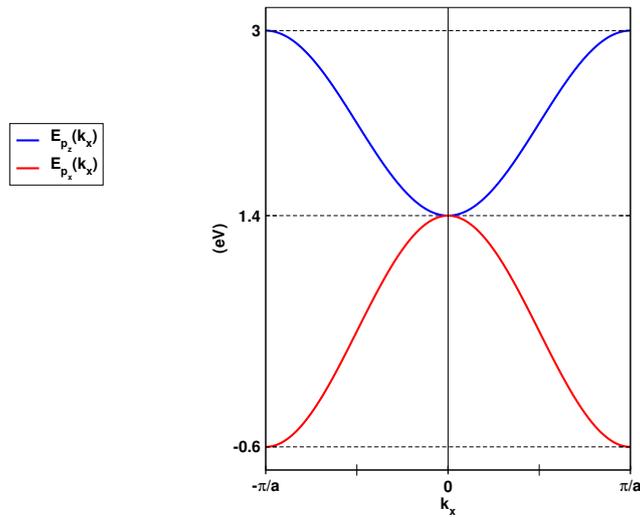
Nella direzione (100), le due bande diventano:

$$\begin{aligned} E_{p_x}(k_x) &= 0.4 + \cos(k_x a) \quad [\text{eV}] \\ E_{p_z}(k_x) &= 2.2 - 0.8 \cos(k_x a) \quad [\text{eV}] \end{aligned}$$

Il grafico è mostrato in figura:

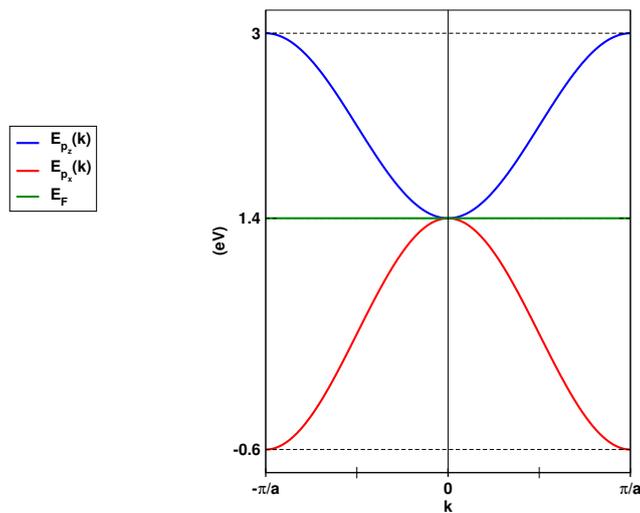
punto 3

Da ora in poi consideriamo il cristallo 1D, quindi $k_x = k$. Questo cristallo è bivalente, per cui i 2N elettroni riempiamo tutta la banda $E_{p_x}(k)$ nell'intero intervallo $k \in (-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})$. L'energia di Fermi coincide dunque con il massimo della banda E_{p_x} : $E_F = E_{p_x}(0) = 1.4 \text{ eV}$.



punto 4

Il cristallo è un semiconduttore a gap nulla, quindi è un isolante a $T = 0$ K perchè la banda $E_{p_x}(k)$ è interamente occupata, ma essendo la gap nulla a centro zona gli elettroni possono essere eccitati con un $k_B T$ piccolo quanto si vuole e passare in banda $E_{p_z}(k)$ permettendo il trasporto.



punto 5

Il massimo della banda $E_{p_x}(k)$ è in $k = 0$.

$$v = \frac{1}{\hbar} \left| \left(\frac{\partial E_{p_x}(k)}{\partial k} \right)_{k=0} \right| = 0 \text{ m/s}$$

La massa vale:

$$m = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E_{p_x}(k)}{\partial k^2} \Big|_{k=0} \right)^{-1} = -\frac{\hbar^2}{a^2 \cdot 1 \text{ eV}} = -\frac{6.583 \cdot 10^{-16} \text{ eV s} \cdot 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J s}}{4 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \text{ eV}} = -1.73 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

Esercizio 4

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione N_D . Si sappia che alle tre temperature $T_1 = 500$ K, $T_2 = 400$ K, e $T_3 = 250$ K, le prime due nella regione intrinseca del semiconduttore e T_3 nella regione estrinseca di temperature intermedie, le corrispondenti conducibilità del semiconduttore siano $\sigma_1 = 13 \Omega^{-1}/\text{m}$, $\sigma_2 = 0.9 \Omega^{-1}/\text{m}$ e $\sigma_3 = 0.006 \Omega^{-1}/\text{m}$. Le masse efficaci di elettroni e lacune non dipendono dalla temperatura.

1. Sapendo che le mobilità degli elettroni e delle lacune sono ben rappresentate dalle espressioni $\mu_n = \mu_{0,n} (T[\text{K}]/300)^{-3/2}$ e $\mu_p = \mu_{0,p} (T[\text{K}]/300)^{-3/2}$, determinare il valore dell'energia di gap, supposta indipendente dalla temperatura.
2. Calcolare il valore del potenziale chimico a T_2 , sapendo che le relazioni di dispersione della banda di valenza e conduzione sono: $E_V(k) = E_V - \alpha k^2$ e $E_C(k) = E_C + \beta k^2$. $E_V = 632$ meV, $\alpha = \hbar^2/m_0$ e $\beta = 2\hbar^2/m_0$, dove m_0 è la massa dell'elettrone.
3. Il contributo dei portatori minoritari alla conducibilità elettrica a T_3 , sapendo che $\mu_{0,p} = 0.36 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$.

Soluzione

punto 1

In regime intrinseco si ha che:

$$n(T) = p(T) = n_i(T) = 2.534 \left(\frac{m_n^* m_p^*}{m_0^2} \right)^{3/4} \left(\frac{T[\text{K}]}{300} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T[\text{K}]} \right] \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} = A \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T} \right] \quad (4)$$

dove A è una costante.

Nello stesso regime, la conducibilità è:

$$\sigma(T) = e(\mu_e + \mu_p)n_i = e (\mu_{0,n} + \mu_{0,p}) \left(\frac{T[\text{K}]}{300} \right)^{-3/2} A \left(\frac{T[\text{K}]}{300} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T} \right] = B \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T} \right] \quad (5)$$

dove B è una costante.

Sfruttando i due dati di conducibilità a T_1 e T_2 si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} &= \exp \left[\frac{E_g}{2k_B} (T_2^{-1} - T_1^{-1}) \right] \\ E_g &= 2k_B (T_2^{-1} - T_1^{-1})^{-1} \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) = 2 \cdot 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} (400^{-1} - 500^{-1})^{-1} \text{ K} \ln \left(\frac{13}{0.9} \right) \\ &= 2k_B \cdot (5340.6) \text{ K} = 0.92 \text{ eV} \end{aligned}$$

punto 2

Il potenziale chimico è dato da:

$$\mu(T) = E_V + \frac{E_g}{2} - \frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_n^*}{m_p^*} \right)$$

le masse efficaci si trovano dalle bande:

$$\begin{aligned} m_n^* &= \hbar^2 \left(\left| \frac{\partial^2 E_C(k)}{\partial k^2} \right|_{k=0} \right)^{-1} = \frac{\hbar^2}{2\beta} = \frac{m_0}{4} \\ m_p^* &= \hbar^2 \left(\left| \frac{\partial^2 E_V(k)}{\partial k^2} \right|_{k=0} \right)^{-1} = \frac{\hbar^2}{2\alpha} = \frac{m_0}{2} \end{aligned}$$

dunque si ha:

$$\mu(T) = 0.632 + \frac{0.92}{2} + \frac{3}{4} \cdot 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \cdot T[\text{K}] \ln(2) \quad (\text{eV}) = 1.092 + 4.48 \cdot 10^{-5} T[\text{K}] \quad (\text{eV})$$

che a T_2 vale:

$$\mu(T_2) = 1.092 + 4.48 \cdot 10^{-5} \cdot 400 \text{ (eV)} = 1.110 \text{ eV}$$

punto 3

Nel regime estrinseco a temperature intermedie, la densità degli elettroni, maggioritari è pari al drogaggio:

$$n(T) = N_D$$

$$\sigma(T) = en\mu_n = eN_D\mu_{0,n} \left(\frac{T[\text{K}]}{300} \right)^{-3/2}$$

mentre i minoritari sono le lacune con densità p data da:

$$p(T) = \frac{n_i^2(T)}{N_D} = \frac{\left(2.534 \left(\frac{1}{8} \right)^{3/4} \left(\frac{T[\text{K}]}{300} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T} \right] \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} \right)^2}{1}$$

A T_3 si è in questo regime, quindi possiamo calcolare il drogaggio:

$$N_D = \frac{\sigma_3}{e\mu_{0,n}} \left(\frac{250}{300} \right)^{3/2}$$

$\mu_{0,n}$ si ricava da uno dei due dati di conducibilità in regime intrinseco (Eqs. 4 and 5):

$$\mu_{0,n} + \mu_{0,p} = \frac{\sigma_1}{eA \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B T_1} \right]} = \frac{13}{1.6 \cdot 2.534 \cdot (1/8)^{3/4} \cdot \exp \left(-\frac{5340.6}{500} \right) \cdot 10^6} \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} = 0.6639 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\mu_{0,n} = 0.6639 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} - \mu_{0,p} = (0.66 - 0.36) \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} = 0.30 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Il drogaggio è dunque:

$$N_D = \frac{0.006}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.30} \left(\frac{250}{300} \right)^{3/2} = 9.51 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

La densità di portatori intrinseci a T_3 :

$$n_i(T_3) = 2.534 \left(\frac{1}{8} \right)^{3/4} \left(\frac{250}{300} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{5340.6}{250} \right] \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} = 2.13 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-3}$$

e dunque la densità delle lacune minoritarie è:

$$p(T_3) = \frac{n_i^2(T_3)}{N_D} = \frac{(2.13 \cdot 10^{15})^2}{9.51 \cdot 10^{16}} = 4.77 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$$

e il loro contributo alla conducibilità è:

$$\sigma_p = pe\mu_p = (4.77 \cdot 10^{13}) \cdot (1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot \left(0.36 \cdot \left(\frac{250}{300} \right)^{-3/2} \right) \Omega^{-1} / \text{m} = 3.6 \cdot 10^{-6} \Omega^{-1} / \text{m}$$