Prova Scritta - 27 Giugno 2016

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Il campo in tutti i punti dello spazio può essere ricavato utilizzando il teorema di Gauss considerando delle superfici cilindriche, coassiali al cilindro, di raggio variabile e altezza h.
Cominciamo considerando il caso $r < R$

$$\frac{q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\pi r^2 h}{\varepsilon_0} = E(r)\, 2\pi r h \tag{1}$$

da cui si ricava immediatamente

$$\vec{E}(r < R) = \frac{\rho\vec{r}}{2\varepsilon_0}. \tag{2}$$

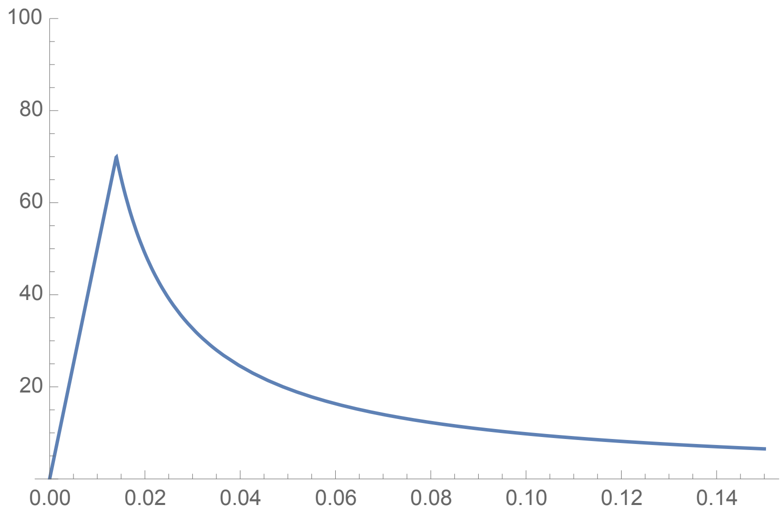
A questo punto possiamo ricavare il valore del campo sulla superficie del cilindro semplicemente sostituendo $r = R$

$$E(R) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0} = 70\, V/m. \tag{3}$$

Consideriamo ora la regione esterna al cilindro in cui il campo può essere scritto come quello generato da un filo rettilineo indefinito carico, con densità lineare di carica pari a $\rho\pi R^2$ ossia

$$\vec{E}(R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} \tag{4}$$

Possiamo quindi disegnare schematicamente l'andamento di E che è quello mostrato nella figura seguente.



Per calcolare la velocità dell'elettrone in orbita dobbiamo considerare il bilancio tra la forza centripeta e la forza elettrostatica sulla generica orbita di raggio r_0

$$F_c = F_e \tag{5}$$

ossia

$$F_c = \frac{mv^2}{r_0} = |q|\, E(r_0) = F_e \tag{6}$$

Sostituendo l'epressione del campo in r_0 abbiamo

$$\frac{mv^2}{r_0} = |q|\, \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r_0} \tag{7}$$

da cui si ricava

$$v = \sqrt{\frac{|q|\,\rho R^2}{2\varepsilon_0 m}} = 4.15 \cdot 10^5 \, m/s. \tag{8}$$

L'energia elettrostatica del cilindro contenuta in un volume di raggio R e altezza L si ottiene dal seguente integrale

$$U = \int d\tau \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \tag{9}$$

ossia, sostituendo il campo elettrico

$$U = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \right)^2 L 2\pi r dr. \tag{10}$$

Svolgendo l'integrale si ottiene

$$U = \frac{\rho L \pi}{4\varepsilon_0} \int r^3 dr = \frac{\rho^2 L \pi R^4}{16\varepsilon_0} = 3.34 \cdot 10^{-11} \, J. \tag{11}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per prima cosa occorre ricavare d. Questo può essere fatto utilizzando l'espressione della capacità iniziale C_i, che si può scrivere come

$$C_i = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} \tag{12}$$

da cui ricaviamo

$$d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{C_i} = 6.5 \, mm \tag{13}$$

Notiamo ora che quando la forza allontana la lastra superiore del condensatore, creando uno spessore di dimensione x che non è riempito di dielettrico, la situazione che si crea corrisponde ad una serie di due condensatori C_1 e C_2 con $C_1 = C_i$. Dalla regola di composizione dei condensatori in serie otteniamo quindi:

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \tag{14}$$

da cui

$$C_{tot} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{15}$$

Sostituendo le espressioni per le capacità dei singoli condensatori, ossia

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}, \qquad C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{x} \tag{16}$$

abbiamo dunque

$$C_{tot} = \frac{(\varepsilon_0 S)^2 \frac{\varepsilon_r}{dx}}{(\varepsilon_0 S) \left[\frac{\varepsilon_r}{d} + \frac{1}{x} \right]} \tag{17}$$

che, con semplici passaggi, diventa

$$C_{tot} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r x + d} \tag{18}$$

In particolare sostituendo in questa espressione $x = a$ si ottiene per la capacità finale C_f

$$C_f = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\varepsilon_r x + d} = 11.2 \, pF. \tag{19}$$

Il lavoro compiuto dalla forza esterna durante tutto lo spostamento può essere calcolato come differenza tra l'energia elettrostatica inizialmente immagazinata nel condensatore e quella finale

$$W_{ext} = U_i - U_f = \frac{1}{2} V^2 \left(C_i - C_f \right) = 3.14 \cdot 10^{-6} \, J. \tag{20}$$

Il lavoro compiuto dal generatore durante tutto il processo è dovuto invece allo spostamento di cariche che deve essere effettuato per mantenere la differenza di potenziale costante

$$W_g = \int dq V = V \left(q_f - q_i \right) \tag{21}$$

Quindi utilizzando

$$C = \frac{q}{V} \tag{22}$$

si ottiene

$$W_g = V\left(q_f - q_i\right) = V^2\left(C_f - C_i\right) = -2W_{ext} = -6.28 \cdot 10^{-6}\, J. \tag{23}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Il flusso varia nel tempo perchè la spira si muove in una regione di campo non omogenea con un velocità costante. Identificando con x la coordinata del lato della spira più vicina al filo, otteniamo per il flusso

$$\Phi\left(x\right) = \int_x^{x+a} bB\left(x\right) dx \tag{24}$$

dove al campo magnetico va sostituita la sua espressione esplicita ossia quella del filo indefinito percorso da corrente

$$B\left(r\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{25}$$

Sostituendo e integrando si ottiene

$$\Phi\left(x\right) = \int_x^{x+a} b\frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx \tag{26}$$

$$\Phi\left(x\right) = \frac{b\mu_0 I}{2\pi}\log\left(\frac{x+a}{x}\right). \tag{27}$$

Per la corrente che circola nella spira a causa della variazione di campo magnetico avremo invece

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \tag{28}$$

Dobbiamo sostituire nell'espressione del flusso la dipendenza esplicita della coordinata x dal tempo. Visto che per ipotesi la spira è costretta a muoversi di moto rettilineo uniforme questa dipendenza sarà $x = x_0 + vt$. Da queste sostituzioni si ricava

$$i = -\frac{b\mu_0 I}{2\pi R}\frac{d}{dt}\left(\log\left(\frac{x_0 + vt + a}{x_0 + vt}\right)\right) \tag{29}$$

e svolgendo la derivata si arriva a

$$i = \frac{b\mu_0 I}{2\pi R}\frac{av}{\left(x+a\right)x} \tag{30}$$

Notiamo inoltre che man mano che la spira entra nella regione del campo B il flusso concatenato cresce. Per questo motivo la corrente circola nella spira della figura in senso orario.
Essendo la spira percorsa da corrente i suoi lati subiranno un forza dovuta al campo magnetico. In particolare, il due lati paralleli alla direzione del moto subiranno forze uguali in modulo e opposte in segno che daranno dunque contributo nullo alla risultante. I lati perpendicolari alla direzione del moto invece subiscono una forza pari a

$$F = ilB \tag{31}$$

Nel caso del lato destro questa forza è repulsiva e vale

$$F_d = b\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(x+a\right)}\frac{b\mu_0 I}{2\pi R}\frac{av}{\left(x+a\right)x} \tag{32}$$

mentre per il lato sinistro la forza vale

$$F_s = b\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\frac{b\mu_0 I}{2\pi R}\frac{av}{\left(x+a\right)x} \tag{33}$$

ed è attrattiva. La risultante delle forze vale complessivamente

$$F_{tot} = F_s - F_d = \left(\frac{b\mu_0 I}{2\pi}\right)^2\left(\frac{a}{x\left(x+a\right)}\right)^2\frac{v}{R} \tag{34}$$

ed è diretta nel verso delle x negative. È necessario quindi applicare una forza esterna di eguale modulo e direzione opposta per mantenere il moto a velocità costante. Sostituendo il tempo $t = 10^{-2}\, s$ nelle espressioni sopra trovate si ottiene

$$x\left(t = 10^{-2} s\right) = 2.3\, cm \quad i\left(t = 10^{-2} s\right) = 6.9 \cdot 10^{-5}\, A \tag{35}$$

che corrisponde ad una forza esterna pari a

$$F\left(t = 10^{-2} s\right) = 1.8 \cdot 10^{-9}\, N \tag{36}$$

Per trovare la potenza dissipata nella spira ad un certo tempo t è sufficiente calcolare $Ri^2(t)$ che vale:

$$P\left(t = 10^{-2} s\right) = 2.4 \cdot 10^{-9}\, W. \tag{37}$$