Prova Scritta - 23 Gennaio 2018

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Calcoliamo per prima cosa la carica totale integrando la densità su tutto il volume occupato dalla distribuzione di carica. Avremo:

$$Q = \int \rho 4\pi r^2 dr = \int_0^R \rho_0 \left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right) 4\pi r^2 dr = \tag{1}$$

$$= 4\pi\rho_0 \int_0^R \left(\frac{r^3}{R} - \frac{r^4}{R^2}\right) dr = 4\pi\rho_0 \left(\frac{R^4}{4R} - \frac{R^5}{5R^2}\right) = \frac{\pi\rho_0 R^3}{5} = 1.42 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}\,. \tag{2}$$

Per ricavare l'espressione del campo elettrico generato dalla distribuzione di carica usiamo il teorema di Gauss. Data la simmetria del problema conviene considerare superfici sferiche di raggio r e dividere lo spazio in due regioni: dentro la distribuzione di carica e fuori dalla distribuzione di carica.
Per $0 \leq r \leq R$ avremo

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho 4\pi {r'}^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0} \int_0^r \left(\frac{{r'}^3}{R} - \frac{{r'}^4}{R^2}\right) dr' = \tag{3}$$

$$= \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^4}{4R} - \frac{r^5}{5R^2}\right) \tag{4}$$

Avremo dunque

$$E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{4R} - \frac{r^3}{5R^2}\right)\,. \tag{5}$$

Per $r \geq R$ avremo

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\rho_0 R^3}{20\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}\,. \tag{6}$$

Il punto dove il campo elettrico è massimo si ottiene ponendo uguale a zero la derivata rispetto a r del campo nella regione 1. Ossia

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2}{4R} - \frac{r^3}{5R^2}\right) = 0\,, \tag{7}$$

che implica

$$\left(\frac{r}{2R} - \frac{3r^2}{5R^2}\right) = 0\,. \tag{8}$$

scartando la soluzione $r = 0$ dove il campo è nullo otteniamo

$$r \left(\frac{1}{2R} - \frac{3r}{5R^2}\right) = 0\,. \tag{9}$$

e dunque

$$r = \frac{5}{6} R = 1.42\,\mathrm{m}\,. \tag{10}$$

Per questo valore di r il campo vale

$$E_{\max} = \frac{25 R\rho_0}{432\varepsilon_0} = 511.3\,\mathrm{V/m}\,. \tag{11}$$

Il lavoro per portare una carica q_0 da $r = 2R$ al centro della distribuzione si può calcolare come

$$W = q_0 \Delta V = q_0 \left[V_f - V_i\right] \tag{12}$$

dove la differenza di potenziale tra lo stato finale e lo stato iniziale va calcolata integrando il campo E separatamente nelle due regioni:

$$\Delta V = V(0) - V(2R) = -\int_{2R}^{0} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \tag{13}$$

$$= \int_{0}^{2R} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{0}^{R} \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{4R} - \frac{r^3}{5R^2} \right) dr + \int_{R}^{2R} \frac{\rho_0 R^3}{20\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} = \tag{14}$$

$$= \frac{\rho_0 R^2}{30\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{40\varepsilon_0} = \frac{7\rho_0 R^2}{120\varepsilon_0} \,. \tag{15}$$

Così facendo si ottiene

$$W = q_0 \frac{7\rho_0 R^2}{120\varepsilon_0} = 1.75 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}\,. \tag{16}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Il circuito 1 del problema è un circuito RC in cui il condensatore subisce un processo di carica. Imponendo che $\mathscr{E} = V_R + V_C$, scrivendo i come la derivata rispetto al tempo della carica presente sulle armature e risolvendo l'equazione differenziale si ottiene

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \,. \tag{17}$$

Questo implica che l'andamento della corrente nel circuito in funzione del tempo è descritto dalla relazione

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{C\mathscr{E}}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/\tau} \,. \tag{18}$$

Tale corrente, nell'attraversare la resistenza R, dissiperà per effetto Joule una quantità di energia nell'unità di tempo pari a Ri^2. L'energia dissipata in un tempo τ si può quindi scrivere come

$$W_R = \int_{0}^{\tau} Ri^2(t)dt = \int_{0}^{\tau} \frac{\mathscr{E}^2}{R} e^{-2t/\tau} dt = \frac{\mathscr{E}^2}{R} \frac{\tau}{2} (1 - e^{-2}) \,. \tag{19}$$

Invertendo quest'ultima relazione è possibile ricavare R

$$R = \frac{\tau \mathscr{E}^2}{W_R} \frac{e^2 - 1}{2e^2} = 0.62\,\Omega \,, \tag{20}$$

e conseguentemente anche C

$$C = \frac{\tau}{R} = 3.2\,\mathrm{mF}\,. \tag{21}$$

Durante il processo di carica V_C varia nel tempo nel modo seguente

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathscr{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{22}$$

Al momento in cui il condensatore viene staccato dal circuito RC e inserito nel circuito 2 quindi, la differenza di potenziale tra le armature vale

$$V_C{}^* = V_C\,(t = 3ms) = 9.3\,\mathrm{V}\,. \tag{23}$$

Visto che il circuito 2 è un circuito oscillante LC, in cui la corrente oscilla senza dissiparsi in modo permanente, la differenza di potenziale $V_C\,(t = 3ms)$ corrisponde alla differenza di potenziale massima tra le armature nel circuito 2. La frequenza con cui oscilla il circuito 2 invece è semplicemente data da

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 55.8\,\mathrm{rad/s}\,. \tag{24}$$

Ricaviamo a questo punto l'andamento delle oscillazioni della corrente i nel circuito 2. L'equazione del circuito è

$$V_C = \frac{q}{C} = L\frac{di}{dt}\,. \tag{25}$$

Derivando rispetto al tempo e sostituendo $i = -dq/dt$ otteniamo

$$-\frac{i}{LC} = \frac{d^2 i}{dt^2}\,, \tag{26}$$

che ammette come soluzione

$$i(\bar{t}) = A\sin(\omega\bar{t} + \phi)\,. \tag{27}$$

Nell'ultima relazione abbiamo definito $\bar{t} = t - t_0$ e dunque, essendo la corrente pari a zero per $\bar{t} = 0$, deve essere $\phi = 0$. Inoltre V_C sarà dato da

$$V_C(\bar{t}) = L\frac{di}{dt} = LA\omega\cos(\omega\bar{t}) \tag{28}$$

e come abbiamo visto $V_C(\bar{t} = 0) = {V_C}^*$ da cui

$${V_C}^* = LA\omega\,. \tag{29}$$

Questo ci permette di fissare l'ampiezza

$$A = \frac{{V_C}^*}{L\omega} = 1.67\,\mathrm{A}\,. \tag{30}$$

In conclusione quindi

$$i(\bar{t}) \;=\; \frac{{V_C}^*}{L\omega}\sin(\omega\bar{t}) \tag{31}$$

$$V_C(\bar{t}) \;=\; {V_C}^*\cos(\omega\bar{t}) \tag{32}$$

Per finire l'energia magnetica immagazzinata nell'induttanza dopo 3s si ricava dall'espressione

$$\frac{1}{2}Li^2(\bar{t} = 3s) = \left(\frac{{V_C}^*}{\omega}\right)^2\frac{1}{2L}\sin^2(\omega\bar{t}) = 0.082\,\mathrm{J}\,. \tag{33}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Iniziamo calcolando il flusso di B attraverso la spira quadrata. Il flusso varierà nel tempo causando una forza elettromotrice indotta a causa della variazione nel tempo del versore normale alla spira. Scegliamo ad esempio $\hat{n}$ in modo che al tempo zero sia diretto come le y positive: $\hat{n}(t = 0) = \hat{y}$. Così facendo si ottiene

$$\phi(B) \;=\; \int \hat{n}\cdot\vec{B}dS = B\cos{(\omega t)}\int dS \tag{34}$$

$$\;=\; abB\cos\omega t \tag{35}$$

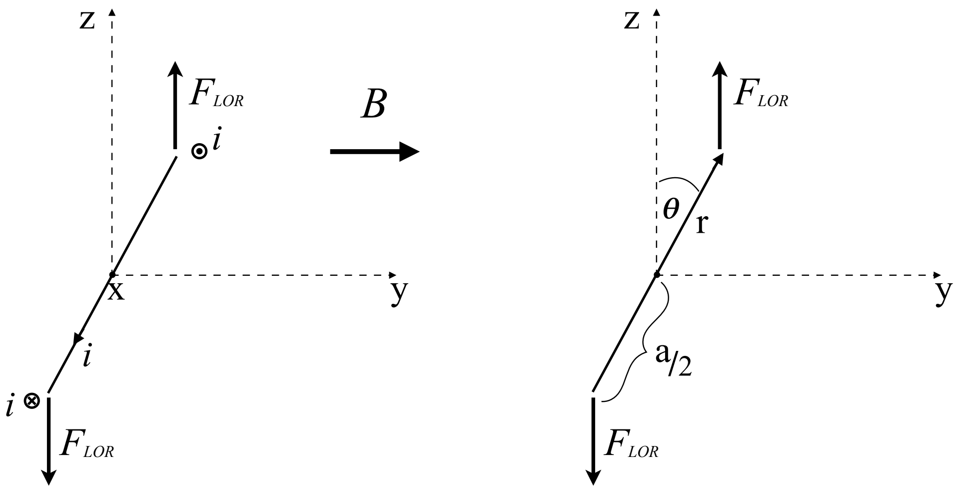
La f.e.m. indotta si ottiene a questo punto derivando rispetto al tempo il flusso

$$f.e.m. = -\frac{d}{dt}\phi(B) = \omega abB\sin{(\omega t)}\;. \tag{36}$$

E il suo valore massimo è

$$f.e.m.^{max} = \omega abB = 8.02\,\mathrm{V}\,. \tag{37}$$

Calcoliamo il momento delle forze esterne che devo applicare alla spira per farla ruotare con ω costante. I lati lunghi della spira, essendo percorsi da corrente, saranno soggetti ad una coppia di forze. Nelle figure sottostanti vediamo la spira di taglio mostrata come un segmento di lunghezza a sul piano yz. Come mostrato nella figura di sinistra, la corrente circola dall'alto verso il basso nel lato di lunghezza a in vista, è uscente dal foglio nel lato in alto di lunghezz b mentre è entrante nel foglio lungo il lato in basso di lunghezza b. Tutto questo è consistente con il fatto che il flusso in questa fase è decrescente e con il verso scelto per $\hat{n}$.



Quindi sui lati di lunghezza b la corrente e il campo sono sempre perpendicolari. Ad esempio la forza in alto sarà pari a

$$F^{Lor}{}_1(t) = i(t)bB\,, \tag{38}$$

e diretta come mostato in figura.
Il momento M_1 della forza in alto, rispetto all'asse di rotazione della spira, potrà quindi essere scritto come (vedi figura di destra)

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1^{Lor} = \frac{a}{2} F_1{}^{Lor} \sin\theta = \frac{a}{2} i(t) bB \sin{(\omega t)}\ \hat{x}\,, \tag{39}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\theta(t) = \omega t$. In maniera esattamente analoga possiamo calcolare il momento della forza in basso M_2, uguale in modulo a M_1 e anch'esso diretto nel verso delle x positive

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_2 = \frac{\omega a^2 b^2 B^2}{2R} \sin^2{(\omega t)}\ \hat{x}\,. \tag{40}$$

Le forze agenti sui lati di lunghezza a invece non producono alcun momento. Il momento complessivamente agente sulla spira a causa di B sarà quindi

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2\,, \tag{41}$$

e pertanto occorrerà applicare un momento uguale e opposto affinchè la spira ruoti con ω costante

$$\vec{M}^{ext} = -\vec{M} = -\frac{\omega a^2 b^2 B^2}{2R} \sin^2{(\omega t)}\ \hat{x}\,. \tag{42}$$

Infine l'energia dissipata dalla lampadina sarà data da

$$E_{dis} = \int_0^T R i^2(t) dt = \frac{a^2 b^2 B^2 \pi \omega}{R} = 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}\,. \tag{43}$$