Soluzione prova scritta - 19 Giugno 2015

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Per calcolare il modulo della velocità a cui deve essere sparato il proiettile affinchè esso colpisca il carrello può essere calcolato scrivendo l'espressione della gittata

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}. \tag{1}$$

Invertendo la relazione ottieniamo

$$v = \sqrt{\frac{gd}{\sin 2\theta}} = 7.52\, m/s. \tag{2}$$

Una volta che il proiettile colpisce in carrello in modo anelastico, la velocità immediatamente dopo l'urto può essere ottenuta sfruttando la conservazione della quantità di moto lungo la direzione x. La componente lungo x della velocità del proiettile, che non è mai cambiata durante il moto parabolico vale $v_x = v\cos\theta$, avremo pertanto

$$\frac{M}{3} v \cos\theta = \left(M + \frac{M}{3}\right) V \tag{3}$$

da cui

$$V = \frac{v\cos\theta}{4} = 1.63\, m/s. \tag{4}$$

Dopo l'urto il sistema proiettile + carrello inizia ad oscillare. L'ampiezza delle oscillazioni può essere ricavata sfruttando la conservazione dell'energia. Infatti la massima compressione della molla, ossia l'ampiezza A, si raggiunge nel momento in cui tutta l'energia cinetica in gioco viene convertita in energia potenziale elastica:

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{M}{3}\right)\left(\frac{v\cos\theta}{4}\right)^2. \tag{5}$$

Risolvendo per A abbiamo

$$A = \sqrt{\frac{M}{12k}}\, v\cos\theta = 0.84\, m. \tag{6}$$

La pulsazione ω delle oscillazioni invece si ottiene semplicemente come $\sqrt{k/M_{tot}}$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{M}{3}}} = \sqrt{\frac{3k}{4M}} = 1.94\, rad/s \tag{7}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Scriviamo quindi il bilancio delle forze in un sistema di riferimento dove l'asse delle x è parallelo al piano inclinato e diretto verso la discesa:

$$\begin{cases} Mg\sin\theta - f_a = Ma \\ N - Mg\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{8}$$

A queste equazioni dobbiamo aggiungere il bilancio dei momenti delle forze rispetto all'asse passante per il centro della sfera.

$$f_a R = I\alpha, \tag{9}$$

dove il momento di inirzia della sfera vale

$$I = \frac{2}{5} M R^2. \tag{10}$$

Imponiamo quindi la condizione di puro rotolamento, $a = R\alpha$, e ricaviamo il coefficiente di attrito limite. Per prima cosa sostituiamo questa condizione e la definizione del momento di inierzia nel bilancio dei momenti, ottenendo:

$$f_a = \frac{2}{5}Ma. \tag{11}$$

Sostituiamo quindi l'espressione di Ma in funzione della forza di attrito nella prima equazione del sistema e ricaviamo f_a

$$f_a = \frac{2}{7}Mg\sin\theta. \tag{12}$$

A questo punto il coefficiente di attrito minimo per consentire il puro rotolamento si può ricavare scrivendo

$$\mu_{\lim} = \frac{f_a}{N} = \frac{\frac{2}{7}Mg\sin\theta}{Mg\cos\theta} = \frac{2}{7}\tan\theta = 0.29, \tag{13}$$

dove abbiamo sostituito N usando la seconda equazione del sistema. Per ricavare l'accelerazione invece, posso ad esempio sostituire $f_a = \frac{2}{5}Ma$ nella prima equazione del sistema ottenendo:

$$\frac{7}{5}Ma = Mg\sin\theta, \tag{14}$$

e quindi

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta = 4.95\,m/s^2. \tag{15}$$

Quando la sfera raggiunge la seconda metà del piano inclinato, dove il coefficiente di attrito si annulla, il momento delle forze su di essa si annulla. La sfera perciò continuera a ruotare con velocità angolare costante pari a quella acquisita a metà del percorso. In particolare nella seconda metà del percorso la sua energia cinetica di rotazione resterà costante, mentre l'energia potenziale gravitazionale verrà convertita nella sola energia cinetica del centro di massa. Iniziamo ricavando la velocità angolare dopo che a sfera ha percorso $L/2$. Siano $\bar{\omega}$ e $\bar{v}_{CM}$ rispettivamente la velocità angolare e la velocità del centro di massa raggiunte a metà percorso. Si noti che esse sono ancora legate dalla relazione di puro rotolamento $v = \omega R$. Usando la conservazione dell'energia scriviamo

$$Mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{2}M\bar{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\bar{\omega}^2 = \frac{1}{2}M\bar{\omega}^2R^2 + \frac{1}{5}M\bar{\omega}^2R^2 \tag{16}$$

$$Mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{7}{10}M\bar{\omega}^2R^2 \tag{17}$$

da cui si ottiene la velocità angolare a metà percorso

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{Lg\sin\theta}{R^2}} = 19.27\,rad/s. \tag{18}$$

L'energia cinetica del centro di massa alla fine del piano, sommata all'energia cinetica di rotazione appena ricavata dovrà essere uguale all'energia potenziale totale. In formule:

$$MgL\sin\theta = \frac{1}{2}M{v^2}_{CM} + \frac{1}{2}I\bar{\omega}^2 = \frac{1}{2}M{v^2}_{CM} + \frac{1}{7}MLg\sin\theta \tag{19}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo sostituito la definizione di I e l'espressione di $\bar{\omega}^2$. Si ottiene perciò

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{12}{7}gL\sin\theta} = 5.97\,m/s \tag{20}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Per prima cosa ricaviamo il numero di moli n da pressione volume e temperatura dello stato A

$$n = \frac{V_AP_A}{RT_A} = 32.1. \tag{21}$$

Per la trasformazione adiabatica reversibile AB vale la seguente relazione

$$P_A{V^\gamma}_A = P_B{V^\gamma}_B, \tag{22}$$

inotre essendo il gas biatomico $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$ e $\gamma = \frac{7}{5}$. Possiamo quindi ricavare il volume in B che vale

$$V_B = V_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0.11\, m^3. \tag{23}$$

Dall'equazione di stato per un gas ideale si ottiene a questo punto la temperatura T_B

$$T_B = \frac{V_B P_B}{nR} = 662.5\, K. \tag{24}$$

Consideriamo ora l'espansione isobara BC. La pressione in C è nota, essendo uguale alla pressione in B, mentre la temperatura T_C può essere ricavata dalla quantità di calore scambiata

$$Q = nc_p \left(T_C - T_B \right) \tag{25}$$

da cui

$$T_C = T_B + \frac{Q}{nc_p} = 1037.5\, K \tag{26}$$

T_C e P_C ci permettono di ricavare V_C, che vale

$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = 0.17\, m^3. \tag{27}$$

Per la trasformazione CD sfruttiamo nuovamente la relazione per le adiabatiche

$$P_C {V^\gamma}_C = P_D {V^\gamma}_D \tag{28}$$

e calcoliamo P_D, tenendo conto che $V_A = V_D$. Si ottiene quindi

$$P_D = P_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma} = 1.87 \cdot 10^5\, Pa. \tag{29}$$

Ricaviamo inoltre la temperatura del gas in D

$$T_D = \frac{V_D P_D}{nR} = 562.2\, K. \tag{30}$$

Il rendimeto di un ciclo è definito come

$$\eta = 1 - \frac{Q_c}{Q_a}. \tag{31}$$

Nel ciclo considerato il calore viene scambiato solo nelle trasformazioni BC e DA. Il calore scambiato durante la trasformazione BC è assorbito mentre quello scabiato durante DA è ceduto. Possiamo ricavare Q_c dalla relazione

$$Q_c = nc_v (T_D - T_A), \tag{32}$$

e ottenere quindi un rendimento pari a

$$\eta = 0.5. \tag{33}$$

Per finire possiamo calcolare la variazione di entropia del gas durante la trasformazione BC dalla relazione

$$\Delta S^{BC} = nc_v \log \left(\frac{T_C}{T_B} \right) + nR \log \left(\frac{V_C}{V_B} \right) \tag{34}$$

ottenendo

$$\Delta S^{BC} = 418.7\, J/K \tag{35}$$