Prova Scritta - 18 Gennaio 2018

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Il corpo che effettua il giro della morte avrà accelerazione centripeta che, nel punto più alto della traiettoria deve originarsi dalla somma della forza di gravità e della reazione vincolare. In formule avremo

$$\frac{mv^2}{R} = mg + N\,, \tag{1}$$

dove v è la velocità nel punto massimo della traiettoria. La velocità minima possibile sarà quella che corrisponde a $N = 0$, ossia

$$v^2 = gR\,. \tag{2}$$

La velocità che il corpo possedeva alla base del giro della morte è legata a quella che possiede nel punto massimo della traiettoria dalla relazione

$$\frac{1}{2}m{v^2}_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R\,, \tag{3}$$

ottenuta sfruttando la conservazione dell'energia. Sostituendo sopra la condizione su v si ricava che la velocità minima che il corpo deve avere per poter compiere il giro della morte è

$$v_0 = \sqrt{5gR} = 2.27\,\mathrm{m/s}\,. \tag{4}$$

Verifichiamo per prima cosa che il corpo che parte con velocità v_0 abbia, al termine del giro della morte, energia sufficiente a raggiungere la molla. Notiamo subito che l'energia meccanica totale del corpo alla fine del giro della morte è proprio pari all'energia cinetica iniziale. Raggiungerà quindi la molla se la sua energia cinetica iniziale è maggiore del lavoro della forza d'attrito sul tratto L:

$$\frac{1}{2}m{v^2}_0 - mg\mu_d L > 0\,, \tag{5}$$

il ch eè verificato con i dati del problema. L'energia meccanica, rimasta a disposizione del corpo, comprimerà a questo punto la molla convertendosi in energia potenziale elastica.

$$\frac{1}{2}m{v^2}_0 - mg\mu_d L = \frac{1}{2}kx^2\,. \tag{6}$$

Invertendo la relazione ricaviamo la compressione x:

$$x = \sqrt{\frac{m{v^2}_0 - 2mg\mu_d L}{k}} = 2.6\,\mathrm{cm}\,. \tag{7}$$

Il corpo fino ad ora ha percorso $L + x$ ma, essendo in una zona priva di attrito non può fermarsi. la molla espandendosi lo spedirà nuovamente nel tratto scabro dove si fermerà definitivamente. Il tratto percorso al ritorno sarà dato da

$$\frac{1}{2}kx^2 = mg\mu_d L_{back}\,, \tag{8}$$

da cui

$$L_{back} = \frac{kx^2}{2mg\mu_d} = 2.5\,\mathrm{cm}\,. \tag{9}$$

Lo spazio totale percorso prima di fermarsi definitivamente sarà dato da

$$L_{TOT} = L + 2x + L_{back} = 42.7\,\mathrm{cm}\,. \tag{10}$$

Per poter fare il giro della morte due volte deve avere velocità v_0 (ricavata nel punto 1) dopo avere attraversato per due volte il tratto scabro di lunghezza L, una prima volta all'andata e una seconda volta al ritorno. Dovrà quindi partire con una velocità V_0 che verifichi la condizione:

$$\frac{1}{2}m{V^2}_0 - 2mg\mu_d L = \frac{1}{2}m{v^2}_0\,. \tag{11}$$

Ossia

$$V_0 = \sqrt{{v^2}_0 + 4g\mu_d L} = 3.84\,\mathrm{m/s}\,. \tag{12}$$

Il corpo tornerà al punto di partenza con velocità v_0

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Il momento di inerzia di un'asta di lenghezza L e massa M, che ruota intorno ad un suo estremo vale:

$$I = \frac{1}{3}ML^2\,. \tag{13}$$

Il momento di inerzia del sistema asta più pomodoro vale quindi:

$$I_{TOT} = I + m\frac{L}{4}^2 = \left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4}\right)L^2 = 0.0036\,\mathrm{kgm}^2\,. \tag{14}$$

Dopo l'urto l'energia meccanica del sistema si conserva. Inizialmente avremo solo energia cinetica di rotazione, alla fine solo energia potenziale gravitazionale. Visto che l'asta raggiunge i 90 gradi, il centro di massa dell'asta e il pomodoro si trovano alla stessa quota $L/2$. Avremo quindi

$$\frac{1}{2}I_{TOT}{\omega_0}^2 = (m+M)\,g\frac{L}{2}\,. \tag{15}$$

Sostituendo I_{TOT} otteniamo

$${\omega_0}^2 = \frac{(m+M)\,gL}{I + m\frac{L}{4}^2}\,, \tag{16}$$

ossia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12\,(m+M)\,g}{(4M+3m)\,L}} = 11.1\,\mathrm{rad/s}\,. \tag{17}$$

Durante l'urto anelastico invece la sola cosa che si conserva è il momento angolare rispetto al perno. In formule

$$mv\frac{L}{2} = I_{TOT}\omega_0 \tag{18}$$

il che ci dice che la velocità del pomodoro, un istante prima dell'urto, deve valere

$$v = \left(\frac{2}{3}\frac{M}{m} + \frac{1}{2}\right)L\omega_0\,. \tag{19}$$

Sostituendo nell'espressione sopra ω_0, si ottiene

$$v = \frac{\sqrt{12\,(m+M)\,(4M+3m)\,gL}}{6m} = 5.7\,\mathrm{m/s}\,. \tag{20}$$

Infine, usiamo il fatto che l'energia meccanica si conserva anche tra l'istante iniziale e l'istante subito prima dell'urto. E che pertanto varrà la relazione

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2\,. \tag{21}$$

In conclusione quindi, la velocità iniziale che possedeva il pomodoro, tale da far salire l'asta fino ad un angolo di 90 gradi, vale

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh} = \sqrt{\frac{12\,(m+M)\,(4M+3m)\,gL - 72m^2gh}{36m^2}} = 4.1\,\mathrm{m/s}\,. \tag{22}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Calcoliamo per prima cosa le coordinate termodinamiche dei punti A, B, C e D sfruttando l'equazione di stato dei gas ideali. Avremo rispettivamente

STATO A

$$\begin{aligned} P_A &= 2.0265 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ T_A &= 200\,\mathrm{K} \\ V_A &= \frac{nRT_A}{P_A} = 8.21 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{23}$$

STATO B

$$\begin{aligned} P_B &= P_A = 2.0265 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ T_B &= 300\,\mathrm{K} \\ V_B &= \frac{nRT_B}{P_B} = 12.31 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{24}$$

STATO C

$$\begin{aligned} T_C &= T_B = 300\,\mathrm{K} \\ P_C &= 1.0133 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V_C &= \frac{nRT_C}{P_C} = 24.62 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned} \tag{25}$$

STATO D

$$\begin{aligned} P_D &= P_C = 1.0133 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V_D &= V_A = 8.21 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ T_D &= \frac{P_D V_D}{nR} = 100\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{26}$$

Il lavoro su tutto il ciclo sarà la somma dei lavori sulle singole trasformazioni. Durante la trasformazione da A a B il lavoro W_{AB} vale

$$W_{AB} = P_A(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A) = 831.4\,J\,. \tag{27}$$

Similmente per la trasformazione BC avremo

$$W_{BC} = nRT_B \log\frac{V_C}{V_B} = 1728.9\,J\,, \tag{28}$$

Durante la trasformazione da C a D, che è una compressione, il lavoro W_{CD} sarà

$$W_{CD} = P_C(V_D - V_C) = nR(T_D - T_C) = -1662.8\,J\,. \tag{29}$$

e infine per la trasformazione DA la variazione di volume è nulla e dunque

$$W_{DA} = 0\,. \tag{30}$$

Il totale sarà quindi

$$W_{\mathrm{tot}} = 897.45\,J\,. \tag{31}$$

Anche la variazione di entropia dell'universo si può calcolare come somma delle variazioni sulle singole trasformazioni. Nei tratti reversibili sappiamo che la variazione di entropia dell'universo è nulla. Rimane quindi solo da calcolare quella lungo il tratto irreversibile DA.

$$\Delta S_u = \Delta S_{DA}^{\mathrm{gas}} + \Delta S_{DA}^{\mathrm{amb}} \tag{32}$$

Quella del gas si può calcolare su una trasformazione reversibile che collega lo stato iniziale e finale come

$$\Delta S_{DA}^{\mathrm{gas}} = nc_v \log\frac{T_A}{T_D} \tag{33}$$

mentre quella della sorgente vale

$$\Delta S_{DA}^{\mathrm{amb}} = \frac{-Q_{DA}}{T_A}\,. \tag{34}$$

Sfruttando il primo principio si ricava che Q_{DA} vale semplicemente

$$Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) \tag{35}$$

e pertanto

$$\Delta S_u = nc_v \log\frac{T_A}{T_D} - nc_v\frac{T_A - T_D}{T_A} = 2.4\,J/K\,. \tag{36}$$