Soluzione prova scritta - 17 Settembre 2015

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Iniziamo considerando il bilancio delle forze agenti sulla biglia quando essa raggiunge la sommità del giro della morte:

$$N + mg = ma_c \tag{1}$$

se la biglia si muove seguendo la traiettoria circolare del giro della morte l'accelerazione risultante dovrà essere l'accelerazione centripeta a_c, legata alla velocità della biglia dalla relazione

$$a_c = \frac{v^2}{R}. \tag{2}$$

La velocità minima che la biglia deve avere in cima affinchè riesca a compiere il giro della morte è quella che corrisponde a $N = 0$ ossia

$$v_{\min}{}^2 = gR. \tag{3}$$

Possiamo a questo punto calcolare la compressione minima tale da far si che la biglia raggiunga la sommità del giro della morte con velocità $v_{\min}$ sfruttando la conservazione dell'energia meccanica.

$$\frac{1}{2}kd^2{}_{\min} = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2{}_{\min}. \tag{4}$$

Sostituendo l'espressione di $v_{\min}$ si ottiene

$$\frac{1}{2}kd^2{}_{\min} = 2mgR + \frac{1}{2}mgR, \tag{5}$$

da cui

$$d_{\min} = \sqrt{\frac{5mgR}{k}} = 5.8\,cm. \tag{6}$$

Vogliamo ora ricavare la reazione vincolare N come funzione dell'angolo α percorso all'interno del giro della morte. Per fare questo, seguendo lo stesso ragionamento del punto precedente, scriviamo la risultante delle forze agenti sulla biglia lungo la direzione radiale per un punto generico

$$N - mg\cos\alpha = ma_c = m\frac{v^2}{R} \tag{7}$$

e la conservazione dell'energia meccanica per un punto generico

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\left(1 - \cos\alpha\right). \tag{8}$$

Da quest'ultima relazione ricaviamo

$$mv^2 = kd^2 - 2mgR\left(1 - \cos\alpha\right) \tag{9}$$

che possiamo sostituire nell'espressione di N, ottenendo

$$N = \frac{kd^2}{R} - mg\left(2 - 3\cos\alpha\right). \tag{10}$$

In particolare per $\alpha = 3/4\pi$ si ottiene

$$N = 0.9\,N. \tag{11}$$

Per rispondere all'ultima domanda è sufficiente considerare nuovamente la conservazione dell'energia ed in particolare uguagliare l'energia iniziale (potenziale elastica) con il lavoro svolto dalla forza di attrito

$$\frac{1}{2}kd^2 = \mu mgS \tag{12}$$

da cui si ottiene facilmente

$$\mu = \frac{kd^2}{2mgS} = 0.287 \tag{13}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per calcolare la volocità un istante prima dell'impatto con il suolo possiamo considerare la conservazione dell'energia meccanica, tenendo conto che l'energia potenziale gravitazionale del peso verrà convertita in energia cinetica del peso stesso più energia cinetica di rotazione della puleggia. In formule abbiamo

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{14}$$

dove il momento di inerzia I è pari a

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \tag{15}$$

e v e ω sono legate dalla relazione

$$v = R\omega. \tag{16}$$

Si ottiene dunque sostituendo:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}MR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 \tag{17}$$

che possiamo risolvere per trovare v

$$v = \sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} = 2.0\,m/s. \tag{18}$$

Scriviamo il bilancio delle forze applicate alla puleggia calcolando il momento rispetto al perno

$$\tau = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = I\alpha \tag{19}$$

Nel nostro caso otteniamo

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \tag{20}$$

da cui si ricava

$$\alpha = \frac{2T}{MR}. \tag{21}$$

dal bilancio delle forze su peso avremo invece

$$T - mg = ma \tag{22}$$

dove a è legata ad α dalla relazione

$$a = \alpha R = \frac{2T}{M}. \tag{23}$$

Sostituendo si ottiene quindi

$$T - mg = 2T\frac{m}{M} \tag{24}$$

da cui possiamo ricavare T

$$T = \frac{M}{M+2m}mg = 4.98\,N, \tag{25}$$

ed a

$$a = \frac{2m}{M+2m}g = 2.69\,m/s^2, \tag{26}$$

da cui a sua volta ricaviamo α

$$\alpha = 42.1\,rad/s^2 \tag{27}$$

Per prima cosa ricaviamo la volocità angolare a cui ruota la puleggia quando il peso tocca terra. Essa sarà legata alla velocità finale del peso ricavata nel punto 1.

$$\omega_0 = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{4mgh}{(2m+M)R^2}}. \tag{28}$$

Il momento della forza frenante τ_f deve essere tale da indurre una decelerazione angolare α_f in grado di arrestare la rotazione in $20\,s$. In formule avremo

$$\tau_f = I\alpha_f \tag{29}$$

dove α e $\omega(t)$ sono legate da

$$\omega(\bar{t} = 20s) = 0 = \omega_0 - \alpha\bar{t}. \tag{30}$$

Si ottiene pertanto

$$\tau_f = I\frac{\omega_0}{t} = \frac{MR}{2t}\sqrt{\frac{4mgh}{2m+M}} = 0.012\,N\,m \tag{31}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Sfruttando l'equazione di stato del gas ideali ricaviamo per prima cosa i volumi, uguali tra loro e pari a metà del volume totale, occupati inizialmente dal gas in A e in B

$$\frac{V}{2} = \frac{nRT_0}{P_0} \tag{32}$$

da cui ricaviamo

$$V = 2\frac{nRT_0}{P_0} = 0.060\,m^3. \tag{33}$$

Nello stato finale avremo che il gas in A si trova alla temperatura T_0, essendo in contatto con la sorgente termica, e a pressione $P_A = P_B$ altrimenti la differenza di pressione provocherebbe un ulteriore spostamento del setto il che non può avvenire se si è all'equilibrio. Quindi possiamo calcolare il volume finale V_A come:

$$V_A = \frac{nRT_0}{P_B} = 0.020\,m^3. \tag{34}$$

Da V_A possiamo ricavare il volume finale V_B occupato dal gas in B

$$V_A = \frac{nRT_0}{P_B} \tag{35}$$

e quindi la temperatura finale T_B

$$T_B = \frac{P_B\left(V - V_A\right)}{nR} = 600\,K. \tag{36}$$

Il gas in A durante la trasformazione viene compresso (subisce lavoro) dal gas in B restando però a temperatura costante. Possiamo quindi scrivere per il primo principio $Q_A = W_A$ e calcolare W_A utilizzando il fatto che la trasformazione è isoterma

$$Q_A = W_A = nRT_0 \log\left(\frac{V_A}{V/2}\right) = -1213.6\,J. \tag{37}$$

Per calcolare il calore fornito in B dalla resistenza elettrica consideriamo nuovamente il primo principio per la trasformazione in B

$$Q_B = \Delta U_B + W_B. \tag{38}$$

Si noti che il lavoro subito da A equivale al lavoro svolto da B

$$W_B = -W_A, \tag{39}$$

e che la variazione di energia interna di B può essere facilmente calcolata come

$$\Delta U_B = nc_v\left(T_B - T_0\right) = \frac{5}{2}nR\left(T_B - T_0\right). \tag{40}$$

In conclusione si ottiene quindi

$$Q_B = 8696\,J \tag{41}$$