Secondo Esonero - 1 Giugno 2016

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Iniziamo calcolando le resistenze di ciuscun conduttore. La formula che lega la resistenza alla resistività e ai parametri geometrici è la seguente

$$R_i = \rho_i \frac{h_i}{S} \tag{1}$$

dove h_i è la lunghezza del conduttore i-esimo e S è la sua sezione. Sostituendo i valori si ottiene per le tre resistenze:

$$R_1 = 100\Omega\,, \quad R_2 = 250\Omega\,, \quad R_3 = 400\Omega. \tag{2}$$

A questo punto dobbiamo usare le leggi di Kirchhoff per risolvere il circuito. Cominciamo stabilendo un verso per le correnti i_1 e i_2 che circolano rispettivamente nella maglia di sinistra e nella maglia di destra. Scegliamo in entrambi i casi il verso orario ricordando che questa scelta è arbitraria e non è rilevante per il risultato finale a patto di essere consistenti. Facendo attenzione alla convenzione dei segni per i generatori, le equazioni per le due maglie risultano essere

$$\begin{cases} \mathscr{E}_1 = i_1 R_1 + (i_1 - i_2)\, R_3 \\ -\mathscr{E}_2 = i_2 R_2 + (i_2 - i_1)\, R_3 \end{cases} \tag{3}$$

ossia

$$\begin{cases} \mathscr{E}_1 = i_1\,(R_1 + R_3) - i_2 R_3 \\ \mathscr{E}_2 = i_1 R_3 - i_2\,(R_2 + R_3) \end{cases} \tag{4}$$

Risolvendo il semplice sistema si ottiene per le due correnti

$$i_1 = \frac{\mathscr{E}_1\,(R_2 + R_3) - \mathscr{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = -13.3\,mA \tag{5}$$

e

$$i_2 = \frac{i_1 R_3 - \mathscr{E}_2}{(R_2 + R_3)} = -46.7\,mA. \tag{6}$$

Osserviamo quindi che i_1 e i_2 circolano in realtà in senso anti-orario.
Da queste si ricavano facilmente le correnti che circolano su ciascun ramo. Indicando la corrente di ciascun ramo con un pedice corrispondente alla resistenza in esso contenuta avremo:

$$i_{R_1} = i_1 = \ A \tag{7}$$

$$i_{R_2} = i_2 \tag{8}$$

$$i_{R_3} = i_2 - i_1 \tag{9}$$

La corrente nella resistenza 3 fluisce dunque dall'alto verso il basso.
Quest'ultima corrente è quella rilevante per la potenza dissipata dal conduttore 3 che vale semplicemente

$$P = R_3 {i_{R_3}}^2 = 0.44\,W. \tag{10}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Il flusso varia in base alla porzione di spira che è all'interno della regione dove è presente il campo magnetico. Identificando con x la coordinata del lato destro della spira, otteniamo per il flusso

$$\Phi\,(B(t)) = Blx \tag{11}$$

A questo punto possiamo applicare la legge di Faraday-Neumann-Lenz per ottenere l'esressione della corrente che circola nella spira a partire dal sua f.e.m. indotta

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Blv}{R} \tag{12}$$

Notiamo inoltre che man mano che la spira entra nella regione del campo B il flusso concatenato cresce. Per questo motivo la corrente circola nella spira della figura in senso orario.
Essendo la spira percorsa da corrente i suoi lati subiranno un forza dovuta al campo magnetico. In particolare, il due lati paralleli alla direzione del moto subiranno forze uguali in modulo e opposte in segno che daranno dunque contributo nullo alla risultante. Il lato sinistro essendo ancora fuori dalla regione di campo magnetico non subirà alcuna forza. Sul lato destro della spira il campo B eserciterà invece una forza, in direzione opposta al moto, data da:

$$F = ilB = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \tag{13}$$

La legge di Newton ci dice quindi che

$$F = ma = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \tag{14}$$

ossia

$$a = -\frac{B^2 l^2 v}{mR} \tag{15}$$

che corrisponde ad una equazione differenziale in v nella forma seguente

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} v \tag{16}$$

L'equazione differenziale può essere risolta per separazione delle variabili e imponendo la condizione iniziale $v(t=0) = v_0$ si ottiene la soluzione

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \tag{17}$$

Vogliamo ora trovare il tempo impiegato dalla spira ad entrare totalmente nella regione di campo magnetico. Per farlo ricaviamo la sua $x(t)$ integrando la velocità e ricordandoci di imporre come condizione iniziale $x(t=0) = 0$. Così facendo si ottiene:

$$x(t) = \frac{mRv_0}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}\right) \tag{18}$$

Imponiamo ora

$$x(t^*) = l \tag{19}$$

ossia cerchiamo il tempo che corrisponde ad avere percorso una distanza pari al lato, ovvero essere tutta dentro la regione di campo. In formule

$$1 - \frac{B^2 l^3}{mRv_0} = e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t^*} \tag{20}$$

ossia

$$t^* = -\frac{B^2 l^2}{mR} \log\left(1 - \frac{B^2 l^3}{mRv_0}\right). \tag{21}$$

la velocità all'istante t^* vale quindi

$$v(t^*) = v_0 \left(1 - \frac{B^2 l^3}{mRv_0}\right) = v_0 - \frac{B^2 l^3}{mR}. \tag{22}$$

La velocità minima per riuscire ad entrare totalmente nella regione di campo magnetico corrisponde quindi a quel v_0 tale che $v(t^*) = 0$, ossia

$$v_0 = \frac{B^2 l^3}{mR} = 1.65\, m/s \tag{23}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Cominciamo usando la legge di Snell sulla prima interfaccia

$$\frac{\sin i}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_0} \tag{24}$$

Notiamo l'angolo di rifrazione β rispetto alla normale della prima rifrazione coincide con l'angolo di incidenza durante la seconda rifrazione, vedi figura. Per la seconda rifrazione possiamo quindi scrivere

$$\frac{\sin \beta}{\sin u} = \frac{n_0}{n_1} \tag{25}$$

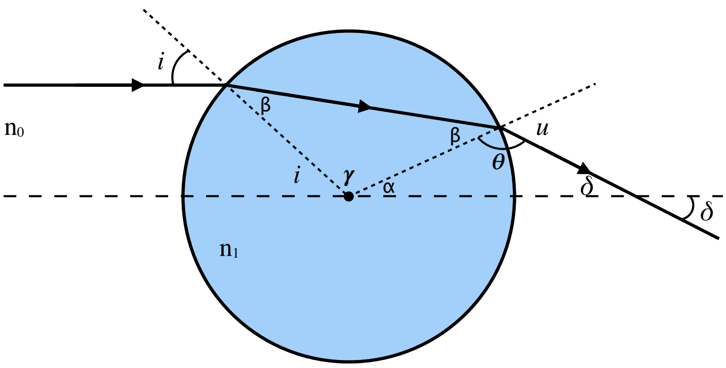
dove u è l'angolo di uscita del raggio dalla goccia, rispetto alla normale. Sostituendo

$$\sin i = \frac{n_1}{n_0}\frac{n_0}{n_1}\sin u \tag{26}$$

da cui

$$i = u \tag{27}$$

ossia esce dalla goccia con un angolo pari all'angolo di incidenza.
Con riferimento alla figura notiamo che



$$2\beta + \gamma = \pi \tag{28}$$

Inoltre vale che

$$i + \gamma + \alpha = \pi \tag{29}$$

Combinando queste due equazioni otteniamo

$$\alpha = 2\beta - i \tag{30}$$

Per trovare δ notiamo inoltre che

$$\alpha + \delta + \theta = \pi \tag{31}$$

e che

$$i + \theta = \pi \tag{32}$$

che a loro volta se combinate danno

$$i = \alpha + \delta. \tag{33}$$

Sostituendo α nell'ultima equazione si ottiene

$$\delta = 2\,(i - \beta) \tag{34}$$

dove β può essere espresso in termini di i usando la legge di Snell. Perciò in conclusione

$$\delta = 2\left(i - \arcsin\left(\frac{\sin i}{n_1}\right)\right) = 38.7° \tag{35}$$