Prova Scritta - 12 Settembre 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Concentriamoci per prima cosa sulla discesa della sfera 1 e ricaviamo da sua velocità al momento dell'urto con la sfera 2. Per farlo utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica. Fissando la quota zero in corrispondenza del minimo della traiettoria della sfera 1, ossia al momento dell'impatto con la sfera 2, e utilizzando il fatto che la sfera 1 parte ferma, avremo

$$m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 {v^2}_1 \,. \tag{1}$$

Deriviamo quindi la velocità della sfera 1 al momento dell'impatto come

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = 1.53\,\mathrm{m/s}\,. \tag{2}$$

Visto che l'urto tra le due sfere è un urto elastico si constervano sia l'energia cinetica totale che la quantità di moto totale. Possiamo quindi mettere a sistema le due seguenti condizioni

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 {v^2}_{i\,1} = \frac{1}{2} m_2 {v^2}_{f\,2} + \frac{1}{2} m_1 {v^2}_{f\,1} \\ m_1 v_{i\,1} = m_2 v_{f\,2} + m_1 v_{f\,1} \end{cases} \tag{3}$$

dove gli indici 1 o 2 indicano di quale sfera si tratta mentre gli indici i e f indicano rispettivamente se si tratta della velocità prima o dopo l'urto. Con semplici passaggi si risolve il sistema ottenendo

$$v_{f\,1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i\,1} = -0.77\,\mathrm{m/s}\,. \tag{4}$$

Per risolvere i punti 2 e 3 serve anche sapere quanto vale la velocità dopo l'urto della sfera 2 che possiamo ricavare sempre dallo stesso sistema e vale

$$v_{f\,2} = \frac{2m_1}{(m_1 + m_2)} v_{i\,1} = 0.77\,\mathrm{m/s}\,. \tag{5}$$

Per ricavare l'angolo θ_{max} per prima cosa dobbiamo calcolare quale quota raggiungerà la sfera 2 e per farlo usiamo nuovamente la conservazione dell'energia meccanica. In formule

$$m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 {v^2}_{f\,2} \,, \tag{6}$$

ossia

$$h_2 = \frac{(v_{f\,2})^2}{2g} = 3\,\mathrm{cm}\,. \tag{7}$$

L'angolo e la quota h_2 sono legati dalla semplice relazione geometrica

$$h_2 = l(1 - \cos\theta_{\mathrm{max}})\,, \tag{8}$$

quindi l'angolo si ricava semplicemente come

$$\cos\theta_{\mathrm{max}} = 1 - \frac{h_2}{l}\,. \tag{9}$$

Sostituendo l'espressione di h_2 che abbiamo ricavato arriviamo a

$$\cos\theta_{\mathrm{max}} = 1 - \frac{(v_{f\,2})^2}{2gl}\,, \tag{10}$$

da cui

$$\theta_{\mathrm{max}} = 20.0^\circ \tag{11}$$

Scrivendo il bilancio delle forze agenti sulla sfera 2 nel momento in cui ha raggiunto la quota massima, ossia quando la sua velocità si annulla, è immediato ricavare

$$T = mg\cos\theta_{\max} = mg\left(1 - \frac{(v_{f\,2})^2}{2gl}\right) . \tag{12}$$

Sostituendo i dati numerici si ottiene dunque

$$T = 0.69\,\mathrm{N} . \tag{13}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

visto che la sfera non striscia la forza di attrito non compie lavoro e l'energia meccanica del sistema si conserva. Possiamo dunque usare proprio la conservazione dell'energia meccanica per ricavare la velocità con cui la sfera arriva alla fine del piano inclinato. Avremo perciò

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 , \tag{14}$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che tutta l'energia potenziale gravitazionale dovuta alla variazione di quota Δh si converte in energia cinetica di rotazione e energia cinetica del centro di massa. Visto che il moto èdi puro rotolamento la velocità angolare e la velocità del centro di massa sono legate da

$$R\omega = v . \tag{15}$$

Inoltre dobbiamo tenere conto del momento di inerzia che per una sfera omogenea che ruota rispetto al suo centro vale

$$I = \frac{2}{5}mR^2 . \tag{16}$$

Utilizzando queste ultime due relazioni nell'equazione di conservazione dell'energia meccanica si ricava

$$mg\Delta h = \frac{7}{10}mv^2 . \tag{17}$$

Da quest'ultima equazione, invertendo, è possibile ricavare v

$$v = \sqrt{\frac{10g\Delta h}{7}} = \sqrt{\frac{10g\,(h-R)}{7}} = 2.15\,\mathrm{m/s} . \tag{18}$$

Si noti che nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito Δh tenendo conto del fatto che il centro della sfera, che inizialmente si trovavav ad un quota h, alla fine si trova alla quota R.

Vofliamo ora ricavare la forza di attrito statico F_a e per farlo cominciamo scrivendo il bilancio delle forze agenti sulla sfera (proiettate lungo la direzione perpendicolare e parallela al piano) e il bilancio dei momenti rispetto al centro della sfera. In formule questo corrisponde rispettivamente alle prime due e alla terza equazione del seguente sistema

$$\begin{cases} mg\cos\theta - N = 0 \\ mg\sin\theta - F_a = ma \\ F_aR = I\alpha . \end{cases} \tag{19}$$

Naturalmente anche α ed a saranno legate tra loro dalla condizione di puro rotolamento, ossia

$$R\alpha = a . \tag{20}$$

Sostituendo questa condizione, e l'espressione del momento di inerzia, nella terza equazione del sistema si ricava la relazione tra a e F_a

$$F_a = \frac{2}{5}ma . \tag{21}$$

Sostituendo nella seconda equazione l'espressione di F_a si ottiene

$$mg\sin\theta - \frac{2}{5}ma = ma . \tag{22}$$

e dunque

$$a = \frac{5}{7} g sen\theta \,. \tag{23}$$

Il modulo della forza d'attrito statico vale quindi

$$F_a = \frac{2}{7} m g sen\theta = 14.7\,\mathrm{N}\,. \tag{24}$$

Il valore massimo del modulo della forza d'attrito che può sviloppare il vincolo vale

$$F^{\max}{}_a = \mu_s m g \cos\theta \,. \tag{25}$$

Quindi per poter avere un moto di puro rotolamento la forza d'attrito calcolata sopra non deve superare $F^{\max}$. La condizione da imporre è quindi

$$F_a \leq F^{\max} \,, \tag{26}$$

che sostituendo implica

$$\frac{2}{7} m g sen\theta \leq \mu_s m g \cos\theta \,. \tag{27}$$

Deve valere quindi

$$\tan\theta \leq \mu_s \frac{7}{2} \,, \tag{28}$$

ossia

$$\theta \leq \arctan\left(\mu_s \frac{7}{2}\right) = 46.4^\circ \tag{29}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

$V_A = 15.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$ e $P_A = 2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ Calcoliamo per prima cosa le coordinate termodinamiche dei tre punti A, B e C sfruttando l'equazione di stato dei gas ideali. Avremo rispettivamente

STATO A

$$\begin{aligned} P_A &= 2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V_A &= 15.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ T_A &= \frac{P_A V_A}{nR} = 360.8\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\tag{31}$$

STATO B

$$\begin{aligned} P_B &= P_A = 2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V_B &= 2V_A = 30.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ T_B &= \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{P_A 2V_A}{nR} = 2T_A = 721.7\,\mathrm{K} \end{aligned} \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

STATO C

$$\begin{aligned} T_C &= T_A = 360.8\,\mathrm{K} \\ V_C &= V_B = 2V_A = 30.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \\ P_C &= \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_A}{2V_A} = \frac{P_A}{2} = 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \end{aligned} \tag{34}$$

Calcoliamo ora le variazioni di energia interna lungo i tre rami della trasformazione ciclica. Durante la trasformazione da A a B la variazione di energia interna ΔU_{AB} vale

$$\Delta U_{AB} = nC_V(T_B - T_A) = nC_V(2T_A - T_A) = \frac{3}{2} R T_A = 4500\,J \,. \tag{35}$$

Similmente per la trasformazione BC avremo

$$\Delta U_{BC} = nC_V(T_C - T_B) = nC_V(T_A - 2T_A) = -\frac{3}{2}RT_A = -4500\,J\,, \tag{36}$$

e infine per la trasformazione CA la variazione di energia interna è nulla visto che la trasformazione in questione è isoterma

$$\Delta U_{CA} = 0\,. \tag{37}$$

Calcoliamo ora calore scambiato e lavoro in ciascuna trasformazione. Per la trasformazione AB avremo dal primo principio

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB}\,, \tag{38}$$

dove il lavoro può essere calcolato come

$$W_{AB} = P_A\,(V_B - V_A) = P_A V_A = 3000\,J\,. \tag{39}$$

Il calore scambiato nella trasformazione AB vale dunque

$$Q_{AB} = P_A V_A + \frac{3}{2}RT_A = RT_A + \frac{3}{2}RT_A = \frac{5}{2}RT_A = 7500\,J\,. \tag{40}$$

Lungo la trasformazione BC invece, visto che il volume non varia, il lavoro è nullo e perciò

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC}\,, \tag{41}$$

che sostituendo implica

$$Q_{BC} = -\frac{3}{2}RT_A = -4500\,J\,. \tag{42}$$

Durante la trasformazione CA la temperatura è costante il che implica

$$Q_{CA} = W_{CA}\,, \tag{43}$$

e

$$W_{CA} = \int PdV = \int nRT_A\frac{dV}{V} = nRT_A \log\frac{V_A}{V_C} = nRT_A \log\frac{1}{2} = -2079.4\,J\,. \tag{44}$$

In conclusione il calore ceduto e il calore assorbito valgono

$$Q_c = Q_{BC} + Q_{CA} = 6574.4\,J \tag{45}$$

$$Q_a = Q_{AB} = 7500\,J\,, \tag{46}$$

il lavoro e il calore scambiato sono pari a

$$W = Q = Q_a + Q_c = W_{AB} + W_{CA} = 920.6\,J \tag{47}$$

e infine il rendimento vale

$$\eta = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} = 0.12 \tag{48}$$