Prova Scritta - 12 Giugno 2018

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Calcoliamo la carica totale

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi \left[(2R)^3 - R^3\right] \rho_2 = \tag{1}$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \left[\rho_1 + 7\rho_2\right] = -35.5\,\mathrm{nC}\,. \tag{2}$$

La differenza di potenziale tra il centro e il bordo si può scrivere come

$$V(0) - V(2R) = -\int_{2R}^{0} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{2R}^{0} E dr = \tag{3}$$

$$= \int_{0}^{R} E_1(r) dr + \int_{R}^{2R} E_2(r) dr \tag{4}$$

Dove E_1 è il campo per $r < R$ che vale, usando il teorema di Gauss

$$E_1 4\pi r^2 = \frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1\,, \tag{5}$$

allora

$$\vec{E}_1(r) = \frac{r\rho_1}{3\varepsilon_0}\,. \tag{6}$$

Mentre E_2 è il campo tra R e $2R$, ossia

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R^3\right)\rho_2\right] \tag{7}$$

da cui otteniamo

$$E_2 4\pi r^2 = \frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 + \frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R^3\right)\rho_2\right] \tag{8}$$

e dunque

$$\vec{E}_2(r) = \left(\frac{R^3(\rho_1 - \rho_2)}{3\varepsilon_0 r^2} + \frac{r\rho_2}{3\varepsilon_0}\right)\hat{r}\,. \tag{9}$$

La differenza di potenziale si può ottenere allora come

$$V(0) - V(2R) = \int_{0}^{R} \frac{r\rho_1}{3\varepsilon_0} dr + \int_{R}^{2R} \frac{R^3(\rho_1 - \rho_2)}{3\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R}^{2R} \frac{r\rho_2}{3\varepsilon_0} dr = \tag{10}$$

$$= \frac{\rho_1}{6\varepsilon_0} R^2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{3\varepsilon_0} R^3 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \frac{\rho_2}{6\varepsilon_0} 3R^2 = \tag{11}$$

$$= \frac{\rho_1}{6\varepsilon_0} R^2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{3\varepsilon_0} \frac{R^2}{2} + \frac{\rho_2}{6\varepsilon_0} 3R^2 = \tag{12}$$

$$= \frac{R^2}{3\varepsilon_0}\left[\rho_1 + \rho_2\right] = 30.1\,\mathrm{V}\,. \tag{13}$$

Sfruttiamo la conservazione dell'energia meccanica

$$\frac{1}{2} m v^2(2R) + qV(2R) = \frac{1}{2} m v^2(R/2) + qV(R/2) \tag{14}$$

visto che parte da ferma avremo

$$\frac{1}{2}mv^2(2R) = q\left[V(R/2) - V(2R)\right] \tag{15}$$

quindi la condizione che deve valere affinchè la carica sia in grado di uscire dalla distribuzione (visto che q è positiva)

$$\Delta V = V(R/2) - V(2R) > 0\,. \tag{16}$$

La differenza di potenziale può essere riscritta come

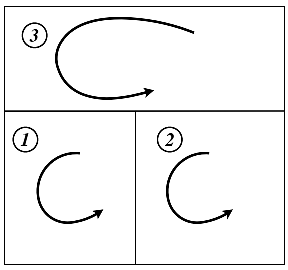
$$\Delta V = [V(0) - V(2R)] - [V(0) - V(R/2)] = \tag{17}$$

$$= [V(0) - V(2R)] - \int_0^{R/2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = \tag{18}$$

$$= [V(0) - V(2R)] - \frac{\rho_1}{6\varepsilon_0}\frac{R^2}{4} = -7.5\,\mathrm{V} \ < 0\,. \tag{19}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Occorre identificare tre maglie indipendenti e stabilire per esse dei versi di percorrenza. Di seguito utilizzeremo la convenzione mostrata in figura Scriviamo l'equazione corrispondente a ciascuna maglia



utilizzando le leggi di Kirchhoff. Per la maglia 1 avremo

$$R_1 i_1 + R_4(i_1 - i_3) + R_2(i_1 - i_2) = \mathscr{E}_3 + \mathscr{E}_1\,, \tag{20}$$

da cui

$$(R_1 + R_2 + R_4)i_1 - R_2 i_2 - R_4 i_3 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3\,. \tag{21}$$

Per la maglia 2 avremo

$$R_3 i_2 + R_5(i_2 - i_3) + R_2(i_2 - i_1) = -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2\,, \tag{22}$$

ossia

$$-R_2 i_1 + (R_2 + R_3 + R_5)i_2 - R_5 i_3 = -(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2)\,. \tag{23}$$

Mentre per la maglia 3 avremo

$$R_6 i_3 + R_4(i_3 - i_1) + R_5(i_3 - i_2) = \mathscr{E}_4 - \mathscr{E}_3\,, \tag{24}$$

e dunque

$$-R_4 i_1 - R_5 i_2 + (R_4 + R_5 + R_6)i_3 = \mathscr{E}_4 - \mathscr{E}_3\,. \tag{25}$$

Mettendo insieme tutte le condizioni ottenute si ricava il seguente sistema

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 & -R_4 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4 + R_5 + R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_3 \\ -(\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2) \\ \mathscr{E}_4 - \mathscr{E}_3 \end{pmatrix} \tag{26}$$

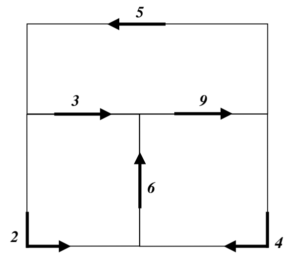
Sostituendo i dati del problema si ha

$$\begin{pmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ -112 \\ 106 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Che ammette una soluzione unica, ossia

$$i_1 = 2A \qquad i_2 = -4A \qquad i_3 = 5A\,. \tag{28}$$

Alla luce dei tre valori ottenuti per le correnti di maglia possiamo individuare le correnti circolanti su ciascun ramo e il loro verso di circolazione. Il tutto è riassunto nella figura seguente dove tutte le correnti sono indicate in Ampere A questo punto è immediato ricavare la potenza dissipata dalla resistenza 3 e



4

$$P_5 = R_3 {i_2}^2 = 112\,\mathrm{W} \tag{29}$$

$$P_4 = R_4 (i_3 - i_1)^2 = 36\,\mathrm{W}\,. \tag{30}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Calcoliamo schematicamente la corrente indotta nella spira dalla corrente variabile nel filo 1

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi r} \tag{31}$$

$$\phi\left(B_1\right) = \int \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS = \int B_1 l dr = A i_1(t) \propto t^2 \tag{32}$$

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\phi\left(B_1\right) \propto t \tag{33}$$

La corrente sarà quindi dipendente dal tempo. Se voglio cancellare la dipendenza da t devo indurre una corrente dipendente da t in direzione opposta. Nel filo 2 quindi la corrente dovrà necessariamente circolare, come nel filo 1, dall'alto verso il basso. Definiamo un sistema di riferimento tale per cui il filo 1 coincide con l'asse y, l'asse z è perpendicolare al foglio e uscente mentre l'asse x intercetta il filo 1 in 0 e il filo 2 in L. Così facendo avremo per il filo 1

$$B_1 = \frac{\mu_0 t^2}{4\pi x} \tag{34}$$

$$\phi\left(B_1\right) = \frac{\mu_0 t^2 l}{4\pi} \int\limits_a^{a+b} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 t^2 l}{4\pi} \log\left(\frac{a+b}{a}\right) \tag{35}$$

$$i_{ind1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi R} \log\left(\frac{a+b}{a}\right) t \tag{36}$$

Mentre per il filo 2 avremo

$$B_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi\left(L - x\right)} \tag{37}$$

$$\phi\left(B_1\right) = \frac{\mu_0\left(At^2 + Bt\right) l}{2\pi} \int\limits_a^{a+b} \frac{dx}{L - x} = \tag{38}$$

$$= \frac{\mu_0\left(At^2 + Bt\right) l}{2\pi} \log\left(\frac{L - a}{L - (a+b)}\right) = \tag{39}$$

$$= \frac{\mu_0\left(At^2 + Bt\right) l}{2\pi} \log\left(\frac{a+b}{a}\right) \tag{40}$$

$$i_{ind1} = \frac{\mu_0 l}{2\pi R}(2At + B)\log\left(\frac{a+b}{a}\right) \tag{41}$$

Affinchè la dipendenza da t si annulli deve quindi essere

$$A = \frac{1}{2}\,\mathrm{A/s^{-2}} \tag{42}$$

mentre la condizione sulla potenza massima impone che

$$P_{\max} = R{i_{\max}}^2 = R(i_{ind1} - i_{ind2})^2 = \tag{43}$$

$$= \left(\frac{\mu_0 l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{R} B^2 \log^2\left(\frac{a+b}{a}\right) \tag{44}$$

da cui

$$B = \frac{2\pi\sqrt{PR}}{\mu_0 l \log\left(\frac{a+b}{a}\right)} = 57.6\,\mathrm{A/s}\,. \tag{45}$$

La corrente indotta varrà quindi

$$\sqrt{\frac{P_{\max}}{R}} = 19.2\,\mathrm{mA} \tag{46}$$

e circolerà in senso antiorario.
Per questi valori di A e B l'energia dissipata in un minuto dal filo 2 vale

$$W = \int R_0 {i_2}^2(t)dt = \tag{47}$$

$$= R_0 \int (At^2 + Bt)^2 dt = \tag{48}$$

$$= R_0 \int (A^2t^4 + 2ABt^3 + B^2t^2)dt = \tag{49}$$

$$= R_0 \left(\frac{A^2}{5}{t_f}^5 + \frac{2AB}{4}{t_f}^4 + \frac{B^2}{3}{t_f}^3\right) = 380.9\,\mathrm{kJ}\,. \tag{50}$$