Prova Scritta - 11 Settembre 2018

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Il campo elettrico tra l'origine e il centro della sfera sarà la somma di due pezzi. Il campo generato dal piano vale

$$E_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x} \quad \text{per} \quad x > 0\,. \tag{1}$$

Il campo generato dalla sfera invece è diviso in due regioni distinte, quello all'interno e quello all'esterno. La parte esterna alla sfera vale

$$E_{S1} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2R-x)^2}\hat{x} \quad \text{per} \quad 0 < x < R \tag{2}$$

dove

$$Q_{tot} = \rho\frac{4}{3}\pi R^3\,. \tag{3}$$

Nella parte interna invece il campo varrà

$$E_{S2} = \frac{\rho\,(2R-x)}{3\varepsilon_0}\hat{x} \quad \text{per} \quad R < x < 2R\,. \tag{4}$$

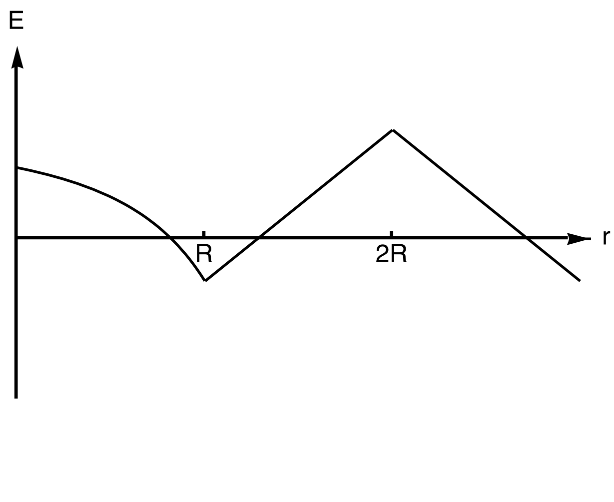
L'ultima equazione si ricava semplicemente dall'applicazione del teorema di Gauss

$$4\pi r^2 E = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \tag{5}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,. \tag{6}$$

Perciò in conclusione il campo totale sarà

$$E_{tot} = \begin{cases} E_p - E_{S1} & \text{per} \quad 0 < x < R \\ E_p - E_{S2} & \text{per} \quad R < x < 2R \end{cases} \tag{7}$$



Tra 0 e R il campo si annulla per

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2R-x)^2} = 0 \tag{8}$$

$$(2R - x) = \sqrt{\frac{2\rho R^3}{3\sigma}} \tag{9}$$

$$x = 2R - \sqrt{\frac{2\rho R^3}{3\sigma}} = 41\,\mathrm{cm}, \tag{10}$$

mentre tra R e 2R si annulla per

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(2R - x) \tag{11}$$

$$\frac{3\sigma}{2\rho} = 2R - x \tag{12}$$

$$x = 2R - \frac{3\sigma}{2\rho} = 64\,\mathrm{cm}. \tag{13}$$

La differenza di potenziale tra 2R e 3R dovuta al piano carico è

$$\Delta V_p = \int_{2R}^{3R} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} = 3390\,\mathrm{V} \tag{14}$$

quella dovuta alla sfera invece sarà

$$\Delta V_p = \int_{2R}^{3R} \frac{\rho\,(x - 2R)}{6\varepsilon_0} dx = \tag{15}$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\left[(x - 2R)^2\right]_{2R}^{3R} = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = 2354\,\mathrm{V} \tag{16}$$

In totale quindi avremo

$$\Delta V = \Delta V_p + \Delta V_S = 5744\,\mathrm{V}\,. \tag{17}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Applichiamo la legge di Ampere per determinare il modulo del campo B in tutto lo spazio. Sappiamo che vale:

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0 \int \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}\, dS \tag{18}$$

dove j è la densità di corrente concatenata alla curva su cui si calcola la circuitazione. Alla luce della simmetria del problema conviene scegliere come curve delle circonferenze con asse coincidente con l'asse del conduttore e suddividere lo spazio in tre regioni distinte. Con questi accorgimenti l'equazione sopra si riduce nei tre casi seguenti a:

$$2\pi r B = 0 \quad \text{per} \;\; r < b \tag{19}$$

perchè nessuna corrente viene concatenata;

$$2\pi r B = \mu_0 I_0 \quad \text{per} \;\; r > a \tag{20}$$

dove tutta la corrente I_0 viene concatenata;

$$2\pi r B = \mu_0 I\,(r) \quad \text{per} \;\; b < r < a \tag{21}$$

dove la corrente concatenata cambierà al variare del raggio della circonferenza considerata.
Visto che la densità di corrente è uniforme e vale

$$j = \frac{I_0}{\pi\,(a^2 - b^2)} \tag{22}$$

la corrente $I(r)$ si può scrivere come

$$I\,(r) = \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} I_0\,. \tag{23}$$

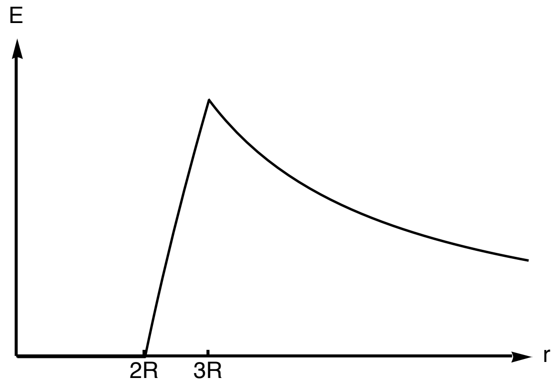
Questo ci porta a

$$\begin{cases} B = 0 \quad \text{per } \; r < b \\ B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{r^2-b^2}{a^2-b^2} I_0 \quad \text{per } \; b < r < a \\ B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad \text{per } \; r > a \end{cases} \tag{24}$$

che per i valori di a e b riportati nel problema diventa

$$\begin{cases} B_1 = 0 \quad \text{per } \; r < b \\ B_2 = \frac{r^2-4R^2}{10\pi R^2 r}\mu_0 I_0 \quad \text{per } \; b < r < a \\ B_3 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \quad \text{per } \; r > a \end{cases} \tag{25}$$

Possiamo a questo punto facilmente disegnare l'andamento del modulo del campo B che sarà



Calcoliamo a questo punto l'espressione di $\bar{B}$ sostituendo $r = 5/2R$ della furmula di B_2. Otteniamo in questo modo

$$\bar{B} = B(2.5R) = \frac{9\mu_0 I_0}{100\pi R} = 4.61 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}\,. \tag{26}$$

Se a questo punto vogliamo ricavare a quale distanza il campo B valga nuovamente $\bar{B}$ per $r > a$ dobbiamo imporre che

$$\bar{B} = B_3(\tilde{r}) \tag{27}$$

ossia

$$\frac{9\mu_0 I_0}{100\pi R} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi\tilde{r}}\,. \tag{28}$$

Questo risulta verificato per $\tilde{r}$ che vale

$$\tilde{r} = \frac{50}{9}R = 1\,\mathrm{m}\,. \tag{29}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Iniziamo calcolando il flusso del campo B_z. Visto che il campo è uniforme in modulo il flusso sarà dato semplicemente dal prodotto di B_z per l'area del triangolo

$$\phi\,(B_z) = B_z A\,(x)\;. \tag{30}$$

Fissata ll'origine dell'asse x all'intersezione delle due rotaie, l'area del triangolo varierà in funzione della coordinata x della sbarretta secondo la legge

$$A\,(x) = \frac{1}{2}x\,h = \frac{1}{2}x\;(x\tan\theta)\;. \tag{31}$$

Pertanto

$$\phi\,(B_z) = \frac{x^2 B_z}{2\sqrt{3}}\,. \tag{32}$$

Derivando il flusso rispetto al tempo si ottiene la forza elettromotrice

$$|fem| = \frac{d}{dt}\phi\,(B) = \frac{xvB_z}{\sqrt{3}}\,. \tag{33}$$

Sapendo quindi il valore della fem in corrispondenza di x_1 possiamo ricavare la velocità della sbarretta

$$v = \frac{\sqrt{3}\,|fem(x_1)|}{x_1 B_z} = 0.62\,\mathrm{m/s}\,. \tag{34}$$

Dobbiamo a questo punto calcolare la resistenza del circuito triangolare che ripenderà dalla sezione del filo e dalla lunghezza del circuito stesso

$$R(x) = \rho\frac{l(x)}{\Sigma}\,. \tag{35}$$

Man mano che la sbarretta si muove la lunghezza del circuito, che è data dal perimetro del triangolo, aumenta secondo la legge

$$l\,(x) = x + ip + h = x + \left(\frac{x}{\cos\theta}\right) + (x\tan\theta) \tag{36}$$

$$= x + \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} = x\left(1 + \frac{3}{\sqrt{3}}\right) = x\left(1+\sqrt{3}\right)\,. \tag{37}$$

Alla fine quindi R dipenderà da x come

$$R(x) = \rho\frac{x\left(1+\sqrt{3}\right)}{\pi {r_0}^2} \tag{38}$$

La corrente che circola nel circuito alla fine sarà quindi costante nel tempo e data da

$$i = \frac{|fem|}{R(x)} = \frac{\pi {r_0}^2}{\left(\sqrt{3}+3\right)\rho} v B_z\,. \tag{39}$$

Dalla corrente si calcola facilmente il modulo della forza che agisce sulla sbarretta in x_1 che vale

$$F = iB_z h = iB_z\frac{x_1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi {r_0}^2}{\left(3+3\sqrt{3}\right)\rho} v {B^2}_z x_1 = 0.036\,\mathrm{N}\,. \tag{40}$$