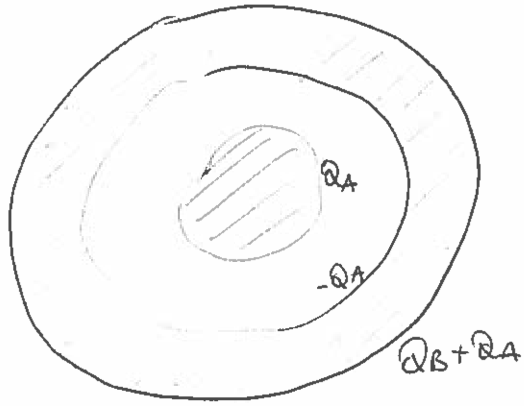
ES 1

Le cariche Q_A e Q_B si distribuiscono nel modo seguente



La differenza di potenziale tra i due conduttori è data da

$$V = V(R_2) - V(R_1) = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}$$

$$Q_A = 4\pi\varepsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = 5.7\ 10^{-7}\ C$$

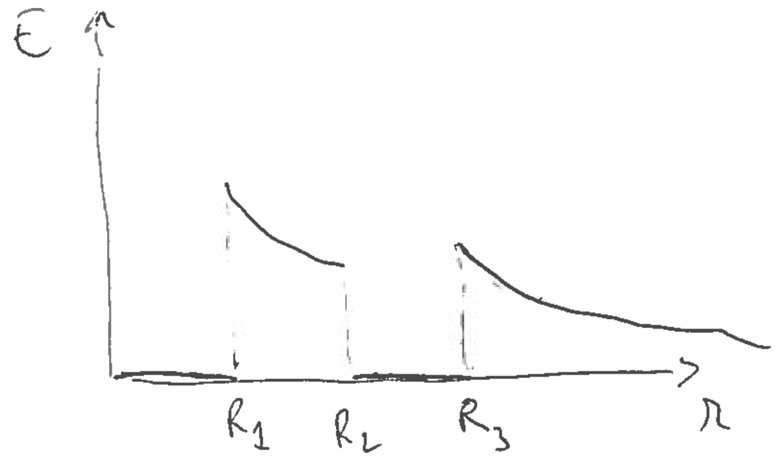
La forza repulsiva sulla carica di prova sarà data da

$$F = q\,\frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 D^2}$$

da cui si ricava $Q_B = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 D^2 F}{q} - Q_A = 6.1\ 10^{-6}\ C$

Usando il teorema di Gauss si ottiene facilmente il campo in tutto lo spazio

$$\begin{cases} E = 0 & r < R_1 \\ E = \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ E = 0 & R_2 < r < R_3 \\ E = \dfrac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & r > R_3 \end{cases}$$



Per ricavare l'energia elettrostatica totale del sistema è sufficiente svolgere il seguente integrale

$$U = \int_{\substack{\text{tutto} \\ \text{lo spazio}}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \, d\tau$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_A^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr \quad +$$

$$+ \int_{R_3}^{\infty} \frac{(Q_A+Q_B)^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q_A^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{(Q_A+Q_B)^2}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_3}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q_A^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2-R_1}{R_2 R_1} + \frac{1}{2} \frac{(Q_A+Q_B)^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_3} = 0.168 \text{ J}$$

ES 2

La capacità di un conduttore isolato è data da

$$C = \frac{q}{V}$$

dove il potenziale della sfera carica vale

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$$

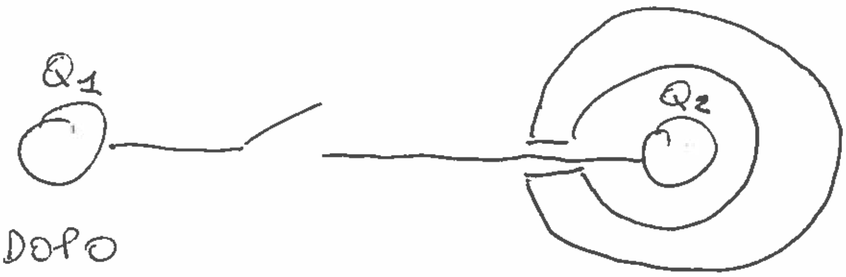
$\Rightarrow$

C_1, ossia la capacità della sfera, vale

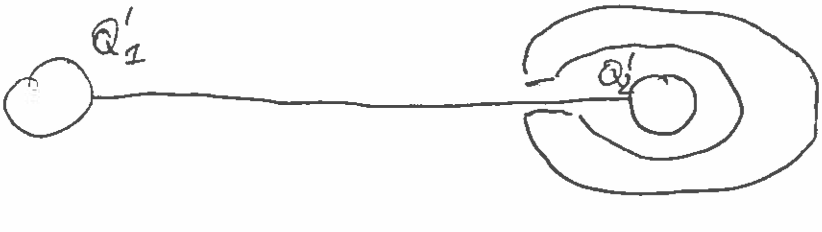
$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R = 3.89\ 10^{-11}\ F$$

Per trovare C_2 usiamo la conservazione della carica che si ridistribuisce nel modo seguente

PRIMA



DOPO



$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$$

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 = C_1 V_0 + C_2 V_0$$

$\Rightarrow$

$$C_1 (V_1 - V_0) = C_2 (V_0 - V_2)$$

$$C_2 = C_1 \frac{V_1 - V_0}{V_0 - V_2} = 4.44\ 10^{-10}\ F$$

troviamo ora i due raggi del condensatore sferico

la capacità si scrive

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad 3R_1 = R_2$$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{3R_1^2}{2R_1} = 6\pi\varepsilon_0 R_1$$

$\Rightarrow$

$$R_1 = \frac{C_2}{6\pi\varepsilon_0} = 2.66\ m$$

$$R_2 = 3R_1 = \frac{C_2}{2\pi\varepsilon_0} = 7.98\ m$$

Calcoliamo la variazione di energia elettrostatica del condensatore sferico

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$U_f - U_i = \frac{1}{2} C_2 \left(V_0^2 - V_2^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} C_1 \frac{V_0 - V_1}{V_2 - V_0} \left(V_0^2 - V_2^2\right) = \frac{1}{2} C_1 \left(V_0 - V_1\right)\left(V_0 + V_2\right)$$

$$U_f - U_i = -1.37 \; 10^{-5} \; J$$

ES 3

La resistenza della spira è data da

$$R = \rho \frac{4L}{S} = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \Omega$$

Il flusso concatenato alla spira può essere scritto nel modo seguente

$$\phi(B) = aB(L - y(t)) = aB(L - v_0 t)$$

avendo posto $y(t)$ la coordinata y del lato superiore della spira
avendo fissato l'origine delle y sul bordo superiore della regione di campo magnetico e l'origine dei tempi nell'istante in cui la spira inizia ad uscire

La fem varrà quindi

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} = aBv_0$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{aBv_0}{R}$$

il flusso tende a decrescere quindi la corrente circola in senso <u>antiorario</u>

L'energia dissipata per effetto Joule fino al tempo in cui la spira esce del tutto dalla regione di campo magnetico è data da

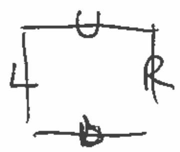
$$E_J = \int_0^{L/v_0} R i^2 \, dt$$

$$= \cancel{R} \frac{a^2 B^2 v_0^2}{R^{\cancel{2}}} \int_0^{L/v_0} dt = \frac{a^2 B^2 v_0 L}{R}$$

$\Rightarrow$

$$a = \sqrt{\frac{R E_J}{B^2 v_0 L}} = 0.5 \text{ m}$$

Il lavoro complessivo compiuto dal campo magnetico sulla spira vale



$$L_m = \int_0^L (\vec{F}_D + \vec{F}_L + \vec{F}_R + \vec{F}_U) \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_0^L \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} = \int_0^L -iBa \, ds = \frac{a^2 B^2 v_0 L}{R} = 1.24 \text{ J}$$

N.B. le forze sugli altri lati o sono nulle o sono perpendicolari allo spostamento

- calcoliamo la forza sul lato sinistro

$$F_L = iB(L - y(t)) =$$

$$= \frac{aBv_0}{R} B\left(L - y(t)\right) =$$

$$= \frac{aB^2 v_0 L}{R} - \frac{aB^2 v_0^2}{R} t$$

diretta verso le x negative