Prova Scritta - 7 Febbraio 2018

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Il sistema corrisponde alla serie di due condensatori cilindrici. Il primo, completamente riempito di dielettrico avrà capacità

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\log\frac{d+a}{a}}\,, \tag{1}$$

mentre il secondo, che è vuoto, avrà capacità

$$C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\log\frac{b}{d+a}}\,. \tag{2}$$

Per la capacità totale di una serie di condensatori vale la relazione

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\log\frac{d+a}{a}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h} + \frac{\log\frac{b}{d+a}}{2\pi\varepsilon_0 h}\,, \tag{3}$$

da cui otteniamo

$$C_{TOT} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r h}{\log\frac{d+a}{a} + \varepsilon_r\log\frac{b}{d+a}} = 21.8\,\mathrm{pF}\,. \tag{4}$$

Iniziamo calcolando il campo tra $a+d$ e b. Usando il teorema di Gauss con superfici cilindriche si ottiene

$$E\,(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r h} = \frac{VC_{TOT}}{2\pi\varepsilon_0 r h}\,. \tag{5}$$

La differenza di potenziale tra la posizione iniziale e finale dell'elettroni si può ottenere allora come

$$\Delta V \;=\; V\,(d+a) - V\,(b) = -\int_b^{d+a}\vec{E}\cdot d\vec{s} = \tag{6}$$

$$= \frac{VC_{TOT}}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{d+a}^{b}\frac{1}{r}dr = \frac{VC_{TOT}}{2\pi\varepsilon_0 h}\log\frac{b}{d+a}\,. \tag{7}$$

Visto che

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = q_e\Delta V \tag{8}$$

la velocità sarà

$$v = \sqrt{\frac{2q_e}{m_e}\Delta V} = \sqrt{\frac{q_e}{m_e}\frac{VC_{TOT}}{\pi\varepsilon_0 h}\log\frac{b}{d+a}} = 7.7\cdot 10^6\,\mathrm{m/s}\,. \tag{9}$$

Una volta estratto il dielettrico la capacità del condensatore diventerà

$$C_{new} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\log\frac{b}{a}}\,. \tag{10}$$

Visto che il condensatore è isolato la carica sulle armature resterà invariata e pari a VC_{TOT}, pertanto il lavoro di estrazione sarà

$$W = \frac{(VC_{TOT})^2}{2C_{new}} - \frac{(VC_{TOT})^2}{2C_{TOT}} = 2.17\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}\,. \tag{11}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Sommando i contributi dei campi generati dai singoli fili calcolati con il teorema di Ampere otteniamo sull'asse x

$$B\left(x,0,0\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x-d}+\frac{1}{x+d}\right)\hat{y}\,, \tag{12}$$

ossia

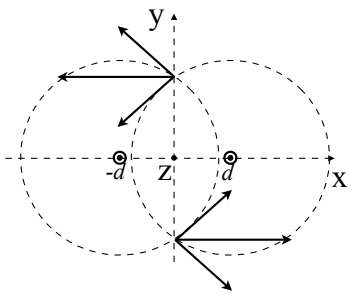
$$B\left(x,0,0\right)=\frac{\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{x}{x^2-d^2}\right)\hat{y}\,. \tag{13}$$

Sull'asse y avremo invece (vedi figura)

$$B\left(0,y,0\right)=2\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{y^2+d^2}}\sin\theta\,. \tag{14}$$

Riscriviamo il $\sin\theta$ come

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{y^2+d^2}}\,. \tag{15}$$



Sostituendo otteniamo in conclusione

$$B\left(0,y,0\right)=-\frac{\mu_0 I}{\pi}\frac{y}{y^2+d^2}\hat{x}\,. \tag{16}$$

Sull'asse z invece il contributo dei due fili si annulla in ogni punto

$$B\left(0,0,z\right)=0\,. \tag{17}$$

Quando la spira è posizionata con il centro nell'origine il soli lati a contribuire alla forza risultante sono quelli orientati come z. Entrambi subiscono una forza diretta nel verso delle y positive proporzionale al campo B in $y=a/2$. La forza complessiva sarà quindi data da

$$F=ia\frac{2\mu_0 I}{\pi}\frac{a/2}{\left(a/2\right)^2+d^2}=\frac{4\mu_0 iI}{\pi}\frac{a^2}{a^2+4d^2}\,, \tag{18}$$

da cui

$$a^2\pi F+4\pi d^2 F=4\mu_0 iIa^2 \tag{19}$$

$$a^2\left(4\mu_0 iI-\pi F\right)=4\pi d^2 F \tag{20}$$

$$a=\sqrt{\frac{4\pi d^2 F}{4\mu_0 iI-\pi F}}=5\,\mathrm{cm}\,. \tag{21}$$

$$\tag{22}$$

Quando la spira è posizionata nel piano xz saranno nuovamente solo i lati orientati come z a contribuire. Il più vicino all'origine subirà una forza

$$F_1=iaB\left(2d-\frac{a}{2},0,0\right)=\frac{ia\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{2d-\frac{a}{2}}{\left(2d-\frac{a}{2}\right)^2-d^2}\right) \tag{23}$$

ossia

$$F_1 = \frac{2ia\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{4d-a}{12d^2-8ad+a^2}\right). \tag{24}$$

Il più lontano invece subirà una forza

$$F_2 = iaB\left(2d+\frac{a}{2},0,0\right) = \frac{ia\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{2d+\frac{a}{2}}{\left(2d+\frac{a}{2}\right)^2-d^2}\right) \tag{25}$$

ossia

$$F_2 = \frac{2ia\mu_0 I}{\pi}\left(\frac{4d+a}{12d^2+8ad+a^2}\right). \tag{26}$$

Il totale sarà quindi

$$F_{TOT} = F_1 - F_2 = \frac{4\mu_0 i I a^2\left(20d^2-a^2\right)}{\pi\left(144d^4+a^4-40a^2d^2\right)} = 7.5\cdot 10^{-8}\mathrm{N}. \tag{27}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Calcoliamo per prima cosa il flusso di B attraverso la spira in funzione della posizione della sbarretta

$$\phi(B) = \int_0^z \vec{B}\cdot\vec{n}dS = \int_0^z aB_0 dz = aB_0 z. \tag{28}$$

La corrente indotta si ricava facilmente derivando rispetto al tempo

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\phi(B) = -\frac{1}{R}aB_0 v_z \tag{29}$$

e risulta proporzionale alla velocità di caduta della sbarretta.
A causa della corrente indotta la sbarretta subirà una forza che in modulo vale

$$|F| = iaB_0 = \frac{1}{R}a^2{B^2}_0 v_z, \tag{30}$$

e in direzione sarà opposta alla forza peso

$$\vec{F} = -\frac{1}{R}a^2{B^2}_0 v_z\ \hat{z}. \tag{31}$$

Il bilancio delle forze risulta quindi

$$m\dot{v}_z = -F + mg, \tag{32}$$

il che ci dice che l'equazione del moto si ricava risolvendo la seguente equazione differenziale

$$\dot{v}_z = g - \frac{a^2{B^2}_0}{mR}v_z. \tag{33}$$

Imponendo la condizione iniziale $v_z(0) = 0$ (la sbarretta parte da ferma) otteniamo la seguente soluzione

$$v_z(t) = \frac{mgR}{a^2{B^2}_0}\left(1-e^{-\frac{a^2{B^2}_0}{mR}t}\right). \tag{34}$$

La sbarretta raggiungerà quindi asintoticamente una velocità massima data da

$$\lim_{t\to\infty} v_z(t) = \frac{mgR}{a^2{B^2}_0} = 1.21\,\mathrm{m/s} \tag{35}$$