Prova Scritta - 6 Giugno 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Avendo fissato l'origine dell'asse x nel punto O l'equazione oraria del moto armonico compiuto dal blocco può essere scritta come

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t) \ . \tag{1}$$

Con questa scelta $x(t=0)=0$ e $v(t=0)$ è massima come deve essere. La velocità angolare ω si ricava facilmente come

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \, . \tag{2}$$

Calcoliamo per prima cosa il tempo t_1 necessario affinchè il proiettile, che parte a distanza d da O, raggiunga il punto dove deve avvenire l'impatto, ossia il punto $x = A_0$. Questo tempo è dato semplicemente da

$$t_1 = \frac{(d - A_0)}{v_0} \, . \tag{3}$$

Calcoliamo poi il tempo t_2 necessario affinchè il blocco oscillante arrivi dal punto O al punto dove deve avvenire l'impatto. In questo caso deve valere

$$x(t_2) = A_0 \quad \Rightarrow \quad t_2 \omega = \frac{\pi}{2} \, , \tag{4}$$

per cui

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega} \, . \tag{5}$$

Il tempo che bisogna attendere prima di fare fuoco quindi è

$$t_{att} = t_2 - t_1 = 0.13 \, s \tag{6}$$

Per ricavare la velocità del sistema subito dopo l'urto basta sfruttare la conservazione della quantità di moto

$$-v_0 m = -v_1 (m + M) \ , \tag{7}$$

da cui si ricava

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m+M} = 1.15 \, \mathrm{m/s} \, . \tag{8}$$

Subito dopo l'urto l'energia meccanica si conserva. Da queste considerazioni è possibile ricavare la nuova ampiezza delle oscillazioni A_1 scrivendo

$$\frac{1}{2}(M+m) v^2{}_1 + \frac{1}{2} k A^2{}_0 = \frac{1}{2} k A^2{}_1 \, . \tag{9}$$

con semplici passaggi si ricava

$$A_1 = \sqrt{v^2{}_0 \frac{m^2}{k(m+M)} + A^2{}_0} = 55 \, \mathrm{cm} \, . \tag{10}$$

Facendo invece la differenza tra l'energia meccanica prima dell'urto e quella dopo l'urto si ottiene l'energia dissipata. L'energia prima dell'urto vale

$$E_i = \frac{1}{2} m v^2{}_0 + \frac{1}{2} k A^2{}_0 \tag{11}$$

quella dopo l'urto vale

$$E_f = \frac{1}{2}(M+m) v_1{}^2 + \frac{1}{2} k A^2{}_0 \tag{12}$$

perciò l'energia dissipata vale

$$E_{dis} = E_i - E_f = \frac{1}{2} m v^2{}_0 \left(\frac{M}{m+M} \right) = 175 \, J \, . \tag{13}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per prima cosa utilizziamo l'additività del momento d'inerzia per calcolare il contributo che i bulloni danno al momento d'inerzia della puleggia. Trattandosi di un disco omegeneo di raggio R e massa M più 8 bulloni di massa m avremo

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \sum_{i=1}^{8} mR^2 \,, \tag{14}$$

ossia

$$I = R^2\left(\frac{M}{2} + 8m\right) = 0.033\,\mathrm{kg\,m}^2\,. \tag{15}$$

Per trovare l'accelerazione dei blocchi e le due tensioni occorre scrivere il bilancio delle forze su ciascu blocco, il bilancio dei momenti delle forze sulla puleggia e la condizione che lega α ed a data dal fatto che la corda non stricia sulla puleggia. Avendo scelto come verso positivo quello lungo la direzione in cui avverrà il moto e avendo cura di assegnare in modo consistente i segni tra α ed a avremo

$$\begin{cases} m_2 g\sin\theta - \mu m_2 g\cos\theta - T_2 = m_2 a \\ T_1 - \mu m_1 g = m_1 a \\ RT_2 - RT_1 = I\alpha \\ \alpha = a/R\,. \end{cases} \tag{16}$$

sfruttiamo subito la condizione di puro rotolamento per unire le equazioni 3 e 4

$$\begin{cases} m_2 g\sin\theta - \mu m_2 g\cos\theta - T_2 = m_2 a \\ T_1 - \mu m_1 g = m_1 a \\ R^2T_2 - R^2T_1 = Ia\,. \end{cases} \tag{17}$$

Per risolvere il sistema procediamo ad esempio come segue. Dalla prima ricaviamo

$$R^2T_2 = m_2\left[g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) - a\right]R^2\,, \tag{18}$$

mentre la seconda può essere riscritta come

$$-R^2T_1 = -m_1\left[\mu g + a\right]R^2\,. \tag{19}$$

Se sostituiamo le ultime due equazioni trovate nella terza otteniamo

$$m_2R^2\left[g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) - a\right] - m_1R^2\left[\mu g + a\right] = Ia\,, \tag{20}$$

che possiamo risolvere per trovare a. In particolare avremo

$$a = \frac{m_2R^2g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) - m_1R^2\mu g}{I + m_2R^2 + m_1R^2}\,, \tag{21}$$

ossia, una volta sostituito I

$$a = \frac{m_2\sin\theta - \mu\left(m_2\cos\theta + m_1\right)}{\frac{M}{2} + 8m + m_2 + m_1}g = 0.55\,\mathrm{m/s}^2\,. \tag{22}$$

Le due tensioni si ottengono a questo punto facilmente come

$$T_1 = m_1\left(a + \mu g\right) = 20.9\,N\,, \tag{23}$$

e

$$T_2 = m_2\left(g\left(\sin\theta - \mu\cos\theta\right) - a\right) = 21.7\,N\,. \tag{24}$$

Per ricavare l'energia dissipata dopo un giro della puleggia è sufficiente calcolare il lavoro fatto dalla forza d'attrito sul blocco m_1 e sul blocco m_2 su uno spostamento di $2\pi R$. Ossia

$$E_{dis} = 2\pi R\mu g\left(m_1 + m_2\cos\theta\right) = 45.45\,\mathrm{J}\,. \tag{25}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Iniziamo calcolando le coordinate termodinamiche dei punti A, B, C e D. Notiamo per prima cosa che essendo il gas monoatomico avremo $c_v = 3/2$, $c_p = 5/2$ e dunque $\gamma = 5/3$. Otteniamo il numero di moli del gas da

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} \,. \tag{26}$$

Essendo $V_B = V_A$ ed essendo nota la temperatura in B otteniamo la pressione P_B come

$$P_B = \frac{n R T_B}{V_B} \,. \tag{27}$$

Durante l'espansione libera essendo il sistema isolato la temperatura resta costante. Pertanto conoscendo il volume V_C si ottiene

$$P_C = \frac{V_B}{V_C} P_B \,. \tag{28}$$

Poi, sfruttando il fatto che la trasformazione CD è adiabatica e che riporta il sistema alla stessa pressione dello stato iniziale, troviamo

$$V_D = \left(\frac{P_C}{P_D}\right)^{1/\gamma} V_C \,. \tag{29}$$

La temperatura T_D richiesta si ottiene dunque come

$$T_D = \frac{P_D V_D}{n R} = 355.86\, K \,. \tag{30}$$

Calcoliamo ora L e Q su ogni trasformazione. AB è isocora

$$L_{AB} = 0 \quad Q_{AB} = \Delta U_{AB} = n c_v \left(T_B - T_A\right) \tag{31}$$

BC è un'espansione libera

$$L_{BC} = 0 \quad Q_{BC} = 0 \quad \Delta U_{BC} = 0 \tag{32}$$

CD è adiabatica

$$L_{CD} = -\Delta U_{CD} = n c_v \left(T_C - T_D\right) \quad Q_{CD} = 0 \tag{33}$$

e per finire DA è isobara

$$L_{DA} = P_A (V_A - V_D) \quad \Delta U_{DA} = n c_v \left(T_A - T_D\right) \quad Q_{DA} = n c_p \left(T_A - T_D\right) \,. \tag{34}$$

Numericamente si ottiene

$$Q_{AB} = 230.23\, J \quad Q_{DA} = -327.56\, J \tag{35}$$

pertanto Q_{AB} è il calore assorbito, Q_{DA} è il calore ceduto e complessivamente il calore scambiato durante il ciclo è negativo e vale

$$Q = -97.35\, J \,. \tag{36}$$

Per ricavare la variazione di entropia dell'universo in un ciclo possiamo ragionare nel modo seguente: per prima cosa notiamo che lungo AB, CD e DA $\Delta S_u = 0$ perchè sono trasformazioni reversibili. Resta da valutare $\Delta S_u^{BC} = \Delta S_{\text{amb}}^{BC} + \Delta S_{\text{gas}}^{BC}$. Inoltre, visto che il gas è isolato dall'ambiente esterno durante la trasformazione BC $\Delta S_{\text{amb}}^{BC} = 0$. Avremo quindi in totale

$$\Delta S_u = \Delta {S_{gas}}^{BC} = n R \log \frac{V_C}{V_B} = 0.38\, J/K \tag{37}$$