Prova Scritta - 5 Luglio 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Per prima cosa ricaviamo il tempo necessario affinchè Mario raggiunga il punto più alto del salto che chiameremo t_{sal}. Naturalmente questo coincide con il tempo che impiega dal punto più alto a tornare a terra ed è legato alla accelerazione di gravità g' dalla relazione

$$\frac{1}{2}g' {t^2}_{\mathrm{sal}} = h \tag{1}$$

dove $h = 5h_M = 7.75\,\mathrm{m}$. Avremo quindi

$$t_{\mathrm{sal}} = \sqrt{\frac{2h}{g'}}\,. \tag{2}$$

Possiamo ragionare nel modo seguente: se Mario raggiunge la sommità del suo salto nello stesso istante in cui il fungo inizia a cadere i due, nonostante le masse diverse, cadranno avendo tempo per tempo la stessa y. Inoltre, visto che la piattaforma dove si trova inizialmente il fungo e quella dove atterra Mario sono allineate, avere la stessa y a tutti i tempi è una condizione sufficiente affinche le due traiettorie si intersechino. Deve quindi valere la seguente condizione

$$t_0 + t_{\mathrm{sal}} = t_F\,, \tag{3}$$

dove t_F è il tempo che ci mette il fungo a raggiungere il bordo della sua piattaforma, ossia

$$t_F = \frac{l}{v_F}\,. \tag{4}$$

Sostituendo si ottiene quindi

$$\left(\frac{l}{v_F} - t_0\right)^2 = \frac{2h}{g'}\,, \tag{5}$$

per cui

$$g' = \frac{2h}{\left(\frac{l}{v_F} - t_0\right)^2} = 80.5\,m/s^{-2}\,. \tag{6}$$

A questo punto è facile sfruttando la conservazione dell'energia meccanica ricavare l'altezza H cha Mario raggiungerebbe sulla terra

$$mg'h = \frac{1}{2}m{v^2}_{\perp} = mgH \tag{7}$$

da cui

$$H = \frac{g'}{g}h = 63.6\,m\,. \tag{8}$$

Occupiamoci ora della seconda parte dell'esercizio. Fino a che Mario non urta il fungo la sua velocità lungo la direzione x rimane invariata e vale

$$v_{\parallel} = \frac{d}{2t_{\mathrm{sal}}} = 6.84\,m/s\,. \tag{9}$$

Se la sua velucità fosse rimasta invariata Mario avrebbe raggiundo il bordo della piattaforma a distanza d. In realtà a causa dell'urto anelastico con il fungo la sua velocità si riduce a un valore ${v_{\parallel}}'$ che possiamo determinare dalla conservazione della quantità di moto lungo x. Infatti

$$mv_{\parallel} - m_F v_F = (m + m_F){v_{\parallel}}' \tag{10}$$

da cui si ricava

$${v_{\parallel}}' = \frac{mv_{\parallel} - m_F v_F}{m + m_F} = 6.66\,m/s\,. \tag{11}$$

Dobbiamo ora ricavare a quale tempo è avvenuto l'urto tra Mario e il fungo e quanta distanza lungo x Mario ha percorso andando alla nuova velocità $v_{\|}'$. Per farlo consideriamo la coordinata x della traiettoria di Mario e del fungo. Conviene scegliere un sistema di riferimento comodo in cui l'origine dei tempi è fissata nel momento in cui Mario si trova al vertice della parabola.

$$\begin{aligned} x_M(t) &= v_{\|} t \\ x_F(t) &= -v_F t + d/2 \,. \end{aligned} \tag{12}$$

Esisterà un tempo $\tilde{t}$ in cui le x coincidono

$$x_M(\tilde{t}) = x_F(\tilde{t}) \tag{13}$$

che vale

$$\tilde{t} = \frac{d/2}{v_{\|} + v_F} = 0.29\, s\,. \tag{14}$$

La distanza lungo x percorsa da Mario dopo l'urto sarà quindi

$$d' = v_{\|}'(t_{\mathrm{sal}} - \tilde{t})\,, \tag{15}$$

e pertanto arriva ad una distanza dalla piattaforma pari a

$$d/2 - (x_M(\tilde{t}) + d') = d/2 - (v_{\|}\tilde{t} + v_{\|}'(t_{\mathrm{sal}} - \tilde{t})) = 2.6\, cm\,. \tag{16}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Fino a che il blocco non striscia la forza di attrito non compie lavoro e l'energia meccanica del sistema si conserva. Abbiamo perciò

$$\frac{M}{2} gR = \frac{M}{2} gR\cos\theta + \frac{1}{2} I\omega^2\,, \tag{17}$$

dove abbiamo fissato l'origine dell'energia potenziale alla quota di O. Il momento di inerzia rispetto all'asse di rotazione si ricava sfruttando la proprietà di additività e vale

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{M}{2} R^2 = MR^2\,. \tag{18}$$

Possiamo quindi ricavare la velocità angolare ω come

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}\,(1 - \cos\theta)} = 0.71\, s^{-2}\,. \tag{19}$$

Per ricavare l'accelerazione angolare α possiamo scrivere il bilancio dei momenti delle forze rispetto ad O. Il contributo della forza peso agente sul blocco è il solo diverso da zero. Svolgendo il prodotto vettoriale e usando il fatto che $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$ si ottiene

$$\frac{M}{2} gR\sin\theta = I\alpha\,. \tag{20}$$

Da quest'ultima equazione si ricava

$$\alpha = \frac{g\sin\theta}{2R} = 2.43\, s^{-2}\,. \tag{21}$$

Per ricavare la reazione normale N e la forza d'attrito F_a dobbiamo scrivere il bilancio delle forze lungo la direzione rediale e tangenziale. Cominciamo dalla componente radiale. Avremo

$$\frac{M}{2} g\cos\theta - N = \frac{M}{2}\omega^2 R\,, \tag{22}$$

da cui si ottiene

$$N = \frac{M}{2} g\,(2\cos\theta - 1) = 6.57\, N\,. \tag{23}$$

Per quanto riguarda la direzione tangenziale invece avremo

$$\frac{M}{2} g\sin\theta - F_a = \frac{M}{2}\alpha R \tag{24}$$

e dunque

$$F_a = \frac{M}{4} g \sin\theta = \ 0.71\, N\,. \tag{25}$$

Il corpo inizia a strisciare quando smette di valere la condizione

$$F_a \leq \mu_s N\,. \tag{26}$$

Per ricavare l'angolo in corrispondenza del quale il blocco inizia a strisciare scriviamo dunque

$$\frac{M}{4} g \sin\theta = \mu_s \frac{M}{2} g\,(2\cos\theta - 1)\ , \tag{27}$$

ossia

$$\sin\theta = 2\mu_s\,(2\cos\theta - 1) \tag{28}$$

Elevando al quadrato si ottiene un'equazione di secondo grado in $\cos\theta$ che ha per soluzioni

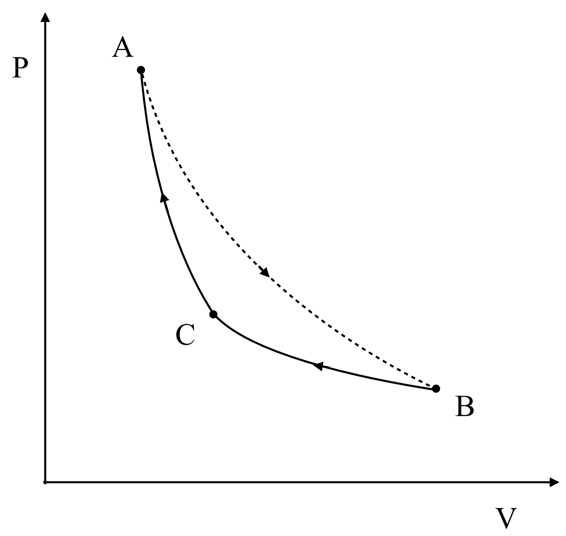
$$\cos\theta = \frac{8{\mu^2}_s \pm \sqrt{1 + 12{\mu^2}_s}}{1 + 16{\mu^2}_s}\,. \tag{29}$$

Avendo scartato la soluzione non fisica perchè maggiore di $\pi/2$ abbiamo

$$\theta_{\max} = 27.6° \tag{30}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Iniziamo disegnando nel piano PV il ciclo descritto dall'esercizio.



Il lavoro compiuto nella trasformazione AB si ricava sfruttando il primo principio della termodinamica che vale anche per trasformazioni irreversibili

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB}\,. \tag{31}$$

Questo implica

$$L_{AB} = Q_{AB} - nc_v(T_B - T_A)\,, \tag{32}$$

dove abbiamo sostituito l'espressione per la variazione di energia interna. Numericamente avremo quindi

$$L_{AB} = 8.5\, KJ\,. \tag{33}$$

Per determinare il volume V_C sfruttiamo le proprietà delle trasformazioni adiabatice. Notiamo per prima cosa che essendo il gas monoatomico avremo $c_v = 3/2$, $c_p = 5/2$ e dunque $\gamma = 5/3$. Varrà dunque

$$T_A {V_A}^{\gamma-1} = T_C {V_C}^{\gamma-1}\,, \tag{34}$$

e pertanto, sfruttando il fatto che la temperatura in C coincide con la temperatura in B, si avrà

$$V_C = V_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.04\, m^3\,. \tag{35}$$

Il calore scambiato nella trasformazione BC coincide con il lavoro svolto essendo nulla la variazione di energia interna. Possiamo quindi scrivere

$$L_{BC} = \int P dV = nRT_B \int \frac{dV}{V} = nRT_B \log\frac{V_C}{V_B} \tag{36}$$

e ottenere

$$L_{BC} = Q_{BC} = -5.9\, KJ\,. \tag{37}$$

Per il calcolo dell'entropia notiamo per prima cosa che essendo un ciclo

$$S^{irr}{}_{AB} + S^{rev}{}_{BC} + S^{rev}{}_{CA} = 0\,. \tag{38}$$

Inoltre visto che la trasformazione CA è adiabatica e reversibile sarà anche iso entropica e dunque

$$S^{rev}{}_{CA} = 0\,. \tag{39}$$

Lungo la trasformazione BC invece la variazione di entropia vale

$$S^{rev}{}_{BC} = \int \frac{dQ}{T_B} = nR\log\frac{V_C}{V_B}\,, \tag{40}$$

e pertanto

$$S^{irr}{}_{AB} = nR\log\frac{V_B}{V_C} = 26.9\, J/K \tag{41}$$