Soluzione prova scritta - 03 Luglio 2015

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Iniziamo considerando il bilancio delle forze agenti sull'insieme blocco più proiettile dopo l'urto.

$$\begin{cases} -(M+m)g\sin\theta - F_a = (M+m)a \\ N - (M+m)g\cos\theta = 0 \end{cases} \tag{1}$$

La forza d'attrito vale

$$F_a = \mu_d N \tag{2}$$

dove N piò essere ricavata dalla seconda equazione

$$N = (M+m)g\cos\theta. \tag{3}$$

Il lavoro svolto dalla forza d'attrito varrà quindi

$$L = F_a d = \mu_d (M+m) g d \cos\theta = 46.0\,J. \tag{4}$$

La conservazione della quantità di moto dell'urto anelastico ci permette di collegare la velocità v_p del proiettile subito prima dell'urto e la velocità v dell'insieme blocco + proiettile dopo l'urto attraverso la relazione

$$mv_p = (M+m)v. \tag{5}$$

Per trovare v, e da essa v_p, bisogna cosiderare che tale velocità ha permesso al blocco soggetto alla decelerazione a di percorrere in salita il piano inclinato sino ad arrestarsi dopo una distanza d. Cominciamo pertanto ricavando a e per farlo sostituiamo l'espressione di F_a nella prima equazione del sistema

$$-(M+m)g[\sin\theta + \mu_d\cos\theta] = (M+m)a \tag{6}$$

da cui

$$a = -g[\sin\theta + \mu_d \cos\theta]. \tag{7}$$

Imponiamo quindi che il moto uniformemente decelerato sia tale che per un certo tempo t' valgano: $v(t') = 0$ e $x(t') = d$. In formule

$$v_f = 0 = v + at' \tag{8}$$

e

$$d = vt' + \frac{1}{2}at'^2. \tag{9}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda di ottiene

$$d = -\frac{v^2}{a} + \frac{v^2}{2a} \tag{10}$$

da cui segue

$$v^2 = -2ad = 2gd[\sin\theta + \mu_d\cos\theta]. \tag{11}$$

Risulta quindi

$$v = 8.3\,m/s \tag{12}$$

da cui si ottiene facilmente v_p

$$v_p = \frac{(M+m)}{m}v = 700.0\,m/s \tag{13}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per calcolare il momento di inerzia rispetto al perno iniziamo considerando il momento di inerzia I_0 di una sbarretta rispetto al suo centro di massa

$$I_0 = \frac{1}{12}ML^2. \tag{14}$$

Applicando il teorema di Huygens-Steiner possiamo ottenere I come

$$I = I_0 + a^2 M \tag{15}$$

dove a è la distanza tra il perno e il centro di massa che vale

$$a = \frac{1}{2}L - \frac{1}{6}L = \frac{1}{3}L. \tag{16}$$

Si ottiene dunque

$$I = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{9}ML^2 = \frac{7}{36}ML^2 = 0.011\, m^2 Kg \tag{17}$$

Per calcolare l'accelerazione angolare α della sbarretta all'istante iniziale occorre scrivere il bilancio dei momenti esterni M^{EXT} applicati su di essa

$$M^{EXT} = I\alpha. \tag{18}$$

In particolare quando la sbarretta è orizzontale su di essa agisce un momento dovuto alla forza di gravità (applicata sul centro di massa) che vale

$$M^{EXT} = Mg\frac{L}{3}. \tag{19}$$

Possiamo quindi ricavare l'accelerazione angolare come

$$\alpha = \frac{MgL}{3I} = \frac{12}{7}\frac{g}{L} = 133.3\, s^{-2} \tag{20}$$

e da essa l'accelerazione a cui è soggetto il centro di massa della sbarretta nell'istante in cui essa viene lasciata cadere

$$a_{CM} = \frac{1}{3}L\alpha = \frac{4}{7}g = 5.6\, m/s^2. \tag{21}$$

Per rispondere all'ultima domanda utilizziamo la conservazione dell'energia meccanica. In particolare durante il moto della sbarretta, l'energia potenziale gravitazionale verrà convertita in energia cinetica di rotazione. Visto che nell'istante in cui la sbarretta raggiunge la posizione verticale il suo centro di massa è sceso di una quota $L/3$, avremo

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{MgL}{3} \tag{22}$$

da cui si ottiene

$$\omega = \sqrt{\frac{2MgL}{3I}} = \sqrt{\frac{24g}{7L}}. \tag{23}$$

Detta ad esempio V la velocità dell'estremità più lontana dal perno e v la velocità di quella più vicina, esse valgono in modulo

$$V = \frac{5}{6}L\omega = 5\sqrt{\frac{2gL}{21}} = 1.71 m/s, \tag{24}$$

e

$$v = \frac{1}{6}L\omega = \sqrt{\frac{2gL}{21}} = 0.34 m/s. \tag{25}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Si noti per prima cosa che essendo la trasformazione AB irreversibile non è possibile utilizzare le equazioni delle trasformazioni adiabatiche per trovare la temperatura in B. Consideriamo invece inizialmente la trasformazione BC anch'essa irreversibile. Essendo isocora $W_{BC} = 0$ e per il primo principio della termodinamica avremo

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_A). \tag{26}$$

Notando che T_C e T_A coincidono, ed essendo noto il calore scambiato, possiamo ricavare T_B come

$$T_B = T_A - \frac{Q_{BC}}{nc_v} = 255.0\,K. \tag{27}$$

Consideriamo ora la trasformazione AB. Essendo adiabatica $Q_{AB} = 0$ e, sempre dal primo principio, abbiamo

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v(T_B - T_A) = Q_{BC} = 395\,J. \tag{28}$$

Per quanto riguarda la trasformazione CA invece, sarà nulla la variazione di energia interna e il calore scambiato sarà uguale al lavoro

$$Q_{CA} = W_{CA} = -nRT_A \log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -848.9\,J. \tag{29}$$

Con queste informazioni siamo in grado di calcolare il lavoro totale svolto sul gas durante il ciclo come la somma dei lavori sulle singole trasformazioni o, alternativamente, come calore assorbito più calore ceduto, essendo nulla la variazione di energia interna lungo una trasformazione ciclica. In particolare avremo

$$W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = -454.0\,J. \tag{30}$$

Occupiamoci ora di calcolare la variazione di entropia dell'universo lungo tutto il ciclo. Essa comprenderà le variazioni di entropia del gas e dell'ambiente lungo tutte le trasformazioni considerate. Tuttavia essendo la trasformazione CA reversibile avremo

$$\Delta S^{gas}{}_{CA} + \Delta S^{amb}{}_{CA} = 0 \tag{31}$$

e pertanto ci basterà considerare le trasformazioni AB e BC

$$\Delta S_U = \Delta S^{gas}{}_{AB} + \Delta S^{amb}{}_{AB} + \Delta S^{gas}{}_{BC} + \Delta S^{amb}{}_{BC}. \tag{32}$$

Per la trasformazione AB la variazione di entropia del gas può essere scritta come

$$\Delta S^{gas}{}_{AB} = nc_v \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = 1.11\,J/K \tag{33}$$

mentre essendo nullo il calore scambiato lungo AB la variazione di entropia dell'ambiente sarà zero

$$\Delta S^{amb}{}_{AB} = 0 \tag{34}$$

Per quanto riguarda la trasformazione BC invece, il contributo del gas sarà

$$\Delta S^{gas}{}_{BC} = nc_v \log\left(\frac{T_C}{T_B}\right) = 1.32\,J/K \tag{35}$$

mentre il contributo dell'ambiente corrisponderà alla variazione di entropia della sorgente a temperatura T_A con cui il gas è in contatto durante la trasformazione, ossia

$$\Delta S^{amb}{}_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_A} = 1.13\,J/K \tag{36}$$

Sommando tutti questi contributi si ottiene una variazione complessiva di entropia pari a

$$\Delta S_U = 3.56\,J/K \tag{37}$$