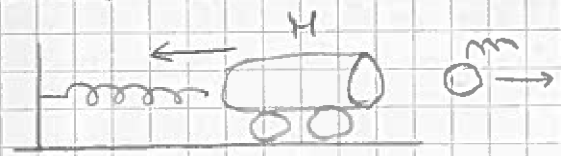
ESERCIZIO

Un cannone di massa $M = 2500$ kg spara un proiettile di massa $m = 5$ kg con velocità $v = 300$ m/s. Calcolare la velocità di rinculo e la costante elastica di una moll[illegible] che può arrestare la corsa del cannone in 30 cm.



$M = 2500$ kg $\quad m = 5$ kg

$v = 300$ m/s $\quad d = 30$ cm

Sul sistema non agiscono forze esterne, quindi la quant[illegible] di moto è conservata:

$$MV = mv$$

con V velocità di rinculo del cannone. Avremo:

$$V = \frac{m}{M} v = 0.6 \text{ m/s}$$

Non essendoci attrito, si conserva anche l'energia meccanica. Se il cannone si deve fermare quando la molla è lunga 30 cm, avremo:

$$\frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} K d^2$$

Da cui:

$$K = \frac{M V^2}{d^2} = 10^4 \text{ N/m}$$

ESERCIZIO

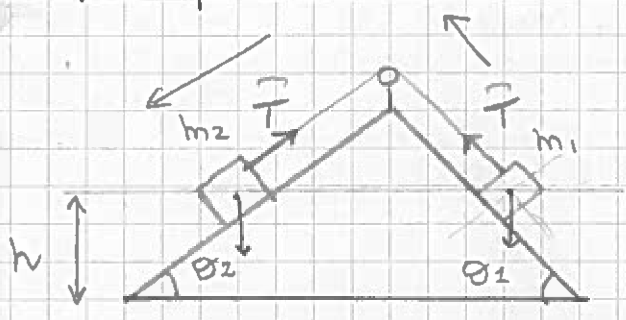
Due blocchi di massa $m_1 = 3$ kg e $m_2 = 5$ kg sono unit
da una fune inestensibile e di massa trascurabile
che passa attraverso una carrucola anch'essa di massa
trascurabile. Ciascuno dei due blocchi poggia su un
piano inclinato come rappresentato in figura. Trascuran-
do l'attrito tra i blocchi e il piano inclinato, si
calcoli:

1) l'accelerazione del sistema
2) la tensione della fune

Si suppongano i due blocchi inizialmente in quiete ad
una quota comune $h = 1.5$ m rispetto al piano orizzon-
le. Calcolare:

3) dopo quanto tempo uno dei due blocchi raggiunge
il piano orizzontale e che quota ha raggiunto
l'altro blocco in quell'istante.

Ripetere i punti 1), 2) e 3) con coefficiente d'attrito
$\mu = 0.01$. Qual è il valore minimo di μ affiché i
blocchi restino fermi?



$\theta_1 = 65°$, $\theta_2 = 35°$

$m_1 = 3$ kg, $m_2 = 5$ kg

$h = 1.5$ m

Scriviamo il secondo principio per le due masse (scelgo
gli assi supponendo che m_2 scende e m_1 sale). Avrò:

$$\begin{cases} T - m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 = m_1 a & (1) \\ N_1 - m_1 g \cos\theta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 - T = m_2 a & (2) \\ N_2 - m_2 g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

posso sommare la (1) e la (2) in modo da eliminare T

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 = (m_1 + m_2) a$$

Da cui:

$$a = \frac{g(m_2 \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta_1)}{m_1 + m_2} = 0.182 \ m/s^2$$

Notiamo che a è la stessa per le due masse perché
il filo è inestensibile. Posso trovare anche T dalla (2):

$$T = m_2 (g \operatorname{sen}\theta_2 - a) = 27.2 \ N$$

Per capire dopo quanto tempo uno dei blocchi raggiunge
il piano orizzontale devo capire quanta distanza
deve percorrere. Se si trova ad una quota h avrò

(è m_2 che scende) $\qquad d_2 = \dfrac{h}{\operatorname{sen}\theta_2}$

Per entrambe le masse il moto è uniformemente accelerato con accelerazione a:

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

Se $\tilde{t}$ è il tempo in cui m_2 tocca terra, allora:

$$d_2 = \frac{1}{2} a \tilde{t}^2 \longrightarrow \tilde{t} = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a \operatorname{sen}\theta_2}} = 5.36 \text{ s}$$

Quando m_2 avrà percorso una distanza d_2 anche m_1 avrà fatto altrettanto poiché la corda è inestensibile. Se voglio calcolare la quota raggiunta da m_1, avrò:

$$h + \Delta h = h + d_2 \operatorname{sen}\theta_1 = h + h \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = 3.87 \text{ m}$$

Consideriamo ora il caso con attrito. Le equazioni della dinamica saranno:

$$\begin{cases} T' - m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - \mu N_1 = m_1 a' \\ N_1 = m_1 g \cos\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -T' + m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 - \mu N_2 = m_2 a' \\ N_2 = m_2 g \cos\theta_2 \end{cases}$$

Ovvero:

$$T' - m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - \mu m_1 g \cos\theta_1 = m_1 a'$$

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 - T' - \mu m_2 g \cos\theta_2 = m_2 a'$$

Ricaviamo a':

$$T' = m_1 a' + m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 + \mu m_1 g \cos\theta_1$$

E ancora:

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 a' - m_1 g \operatorname{sen}\theta_1 - \mu m_1 g \cos\theta_1 - \mu m_2 g \cos\theta_2 = m_2 a'$$

Da cui ricavo:

$$(m_1 + m_2) a' = g \left[m_2 \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta_1 - \mu (m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2) \right]$$

Da cui ricavo:

$$a' = 0.117 \text{ m/s}$$

Essendo $a' \neq 0$ il sistema si muove, quindi μ è abbastanza basso da produrre movimento.
In queste condizioni la tensione vale:

$$T' = 27.12 \text{ N}$$

Il valore minimo di μ affinché i blocchi restino fermi è quello per cui $a' = 0$, ovvero nel valore tale per cui abbiamo:

$$m_2 \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta_1 - \mu\left(m_1\cos\theta_1 + m_2\cos\theta_2\right) = 0$$

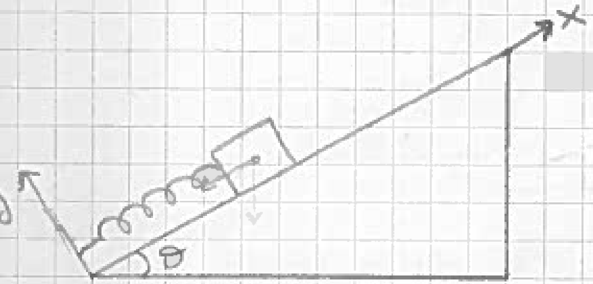
Da cui:

$$\mu = \frac{m_2 \operatorname{sen}\theta_2 - m_1 \operatorname{sen}\theta_1}{m_1\cos\theta_1 + m_2\cos\theta_2} = 0.028$$

ESERCIZIO

Un blocco di 3 kg è tenuto contro una molla di costante elastica $K = 25\ N/cm$ comprimendo la molla di 3 cm dalla sua posizione di riposo. Quando il blocco viene rilasciato la molla lo spinge lungo un piano inclinato di 20° avente un coefficiente di attrito $\mu = 0.1$
Calcolare:

1) Il lavoro fatto dalla molla
2) Il lavoro fatto dalla forza di attrito mentre il blocco si muove di 3 cm
3) La velocità del blocco quando la molla è completamente rilasciata
4) Lo spazio percorso dal blocco sul piano inclinato



$m = 3\ kg \qquad K = 25\ N/cm$

$\theta = 20° \qquad d = 3\ cm$

$\mu = 0.1$

Il lavoro compiuto dalla molla è definito da:

$$L_{molla} = \int_A^B \vec{F}(x)\cdot d\vec{x} = \int_A^B -K\,(x - x_0)\,\hat{u}_x \cdot \hat{u}_x\, dx$$

dove $\hat{u}_x$ è il versore dell'asse x (in questo caso parallelo al piano inclinato). Avremo quindi:

$$L_{molla} = -K\int_A^B (x - x_0)\,dx = -K\left[\frac{1}{2}x_B^2 - \frac{1}{2}x_A^2\right] +$$

$$+ K x_0 \left[x_B - x_A\right]$$

Se aggiungo e tolgo $1/2\, K x_0^2$ avrò:

$$L_{molla} = \frac{1}{2}K\left(x_A^2 - 2x_0x_A + x_0^2\right) - \frac{1}{2}K\left(x_B^2 - 2x_0x_B + x_0^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}K\left(x_A - x_0\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(x_B - x_0\right)^2 =$$

$$= E_P(x_A) - E_P(x_B)$$ con x_0 posizione a riposo della molla

Nel nostro caso avremo:

$$x_A = x_0 - d \quad , \quad x_B = x_0 \qquad \text{con} \quad d = 0.03\ m \quad e \quad K = 2500\ N/m$$

Da cui:

$$L_{molla} = \frac{1}{2} K d^2 = 1.125\ J$$

Il lavoro della forza d'attrito sarà:

$$L_{attrito} = \int_A^B \vec{F}_A \cdot d\vec{x} = \int_A^B - \mu N \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x \, dx =$$

$$= \int_A^B - \mu mg \cos\theta \, \hat{u}_x \cdot \hat{u}_x \, dx = - \mu mg \cos\theta \int_A^B dx =$$

$$= - \mu mg \cos\theta \, d = - 0.083\ J$$

La velocità del blocco quando si stacca dalla molla (quando questa sarà completamente rilassata) può essere ricavata dalla conservazione dell'energia:

$$E_{finale} - E_{iniz} = - L_{attrito}$$

Ma allora

$$E_{finale} = \frac{1}{2} m v^2 + mgh \quad , \quad E_{in} - \frac{1}{2} K d^2$$

Quindi:

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgh - \frac{1}{2} K d^2 = - \mu mg \cos\theta \, d$$

Ma l'altezza h è quella raggiunta dopo aver percorso una distanza d sul piano, quindi $h = d \operatorname{sen}\theta$. Avremo infine:

$$v^2 = \frac{1}{m} \left(K d^2 - mgd (\operatorname{sen}\theta + \mu \cos\theta) \right)$$

Da cui:

$$v = 0.7\ m/s$$

Per calcolare dove si ferma applico di nuovo la conservazione dell'energia indicando con l la distanza percorsa dal blocco dopo che si è staccato dalla molla. Avremo:

$$\underbrace{mg\,l \operatorname{sen}\theta}_{\text{energia finale}} - \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{energia iniziale}} = - \mu mg \cos\theta \, l$$

Ma allora:

$$l = \frac{v^2}{2g(\operatorname{sen}\theta + \mu \cos\theta)} = 0.06\ m$$

E complessivamente:

$$l_{TOT} = l + d = 0.09\ m$$