

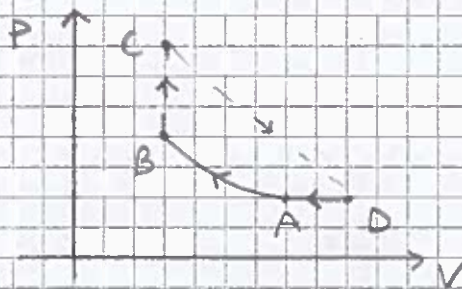
ESERCIZIO

Un motore termico, utilizzando 2 moli di un gas ideale, compie un ciclo irreversibile che comporta le seguenti trasformazioni:

- una compressione isoterma reversibile che porta il gas dalla pressione $p_A = 1 \text{ bar}$ alla pressione $p_B = 2.7 \text{ bar}$; sia $T_A = 300 \text{ K}$ la temperatura iniziale
- un riscaldamento isocoro irreversibile BC con aumento della quantità di calore $Q_{BC} = 13.4 \text{ KJ}$
- un'espansione adiabatica irreversibile CD, al termine della quale il gas ritorna alla pressione iniziale ed a un volume $V_D = 64 \times 10^{-3} \text{ m}^3$
- un raffreddamento isobaro reversibile DA, che riporta il gas allo stato iniziale

Per, sia $c_p = 25 \text{ J/mole K}$ il calore specifico molare a pressione costante. Si determini:

- il rendimento del ciclo
- il lavoro ottenuto
- la variazione di entropia nelle trasformazioni BC e CD



Per ricavare il rendimento dobbiamo calcolare il calore assorbito. Procediamo con le trasformazioni singolarmente:

AB isoterma reversibile

$$\Delta U_{AB} = 0 \rightarrow Q_{AB} = L_{AB}$$

$$L_{AB} = \int_A^B p dV = \int_A^B n R T_A \frac{dV}{V} = n R T_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

essendo poi:

$$V_A = \frac{n R T_A}{P_A}, \quad V_B = \frac{n R T_B}{P_B}$$

ed inoltre $T_A = T_B$, avremo:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{n R T_B}{n R T_A} \frac{P_A}{P_B} = \frac{P_A}{P_B}$$

Quindi:

$$Q_{AB} = n R T_A \ln \frac{P_A}{P_B} = -4954.7 \text{ J}$$

BC isocoro irreversibile

$$L_{BC} = 0 \rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC} = 13.4 \text{ KJ} \quad (\text{dato dato})$$

CD adiabatica irreversibile

$$Q_{CD} = 0$$

DA isobara reversibile

$$Q_{DA} = n c_p (T_A - T_D) = -4244.5 \text{ J}$$

Inoltre:

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR} = \frac{P_A V_D}{nR} = 384.9 \text{ K}$$

Il calore complessivo assorbito sarà allora:

$$Q_{\text{ass}} = Q_{\text{BC}} = 13.4 \times 10^3 \text{ J}$$

mentre quello ceduto sarà:

$$Q_{\text{ced}} = Q_{\text{AB}} + Q_{\text{DA}} = -9.2 \times 10^3 \text{ J}$$

Il rendimento del ciclo sarà allora:

$$\eta = 1 + \frac{Q_{\text{ced}}}{Q_{\text{ass}}} = 0.313$$

Il lavoro ottenuto durante il ciclo sarà:

$$L_{\text{TOT}} = Q_{\text{TOT}} = Q_{\text{ass}} + Q_{\text{ced}} = 4.2 \text{ kJ}$$

Rimane da valutare la variazione di entropia nelle trasformazioni BC e CD.

Ricaviamo la temperatura T_C :

$$Q_{\text{BC}} = nC_V (T_C - T_B) \rightarrow T_C = T_B + \frac{Q_{\text{BC}}}{nC} = 701.2 \text{ K}$$

Ma allora la trasformazione di entropia nella trasformazione BC sarà data da:

$$\Delta S_{\text{BC}} = \int_B^C \frac{dQ_{\text{BC}}}{T} = \int_B^C \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \log \frac{T_C}{T_B} = 28.3 \text{ J/K}$$

Per la trasformazione CD so che certamente $\Delta S_{\text{CD}} \neq 0$ essendo la trasformazione un'adiabatica irreversibile.

Essendo il sistema un gas ideale posso recare ora ΔS a partire da una trasformazione REVERSIBILE che ha gli stessi estremi CD:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{nC_V dT}{T} + \frac{p dV}{T}$$

Da cui:

$$\Delta S_{\text{CD}} = nC_V \log \frac{T_D}{T_C} + \int_C^D \frac{nRT}{VT} dV =$$

$$= nC_V \log \frac{T_D}{T_C} + nR \log \frac{V_D}{V_C}$$

Di questa equazione conosciamo T_C , T_D e V_D . Manda V_C , che però sappiamo:

$$V_C = V_B = \frac{nRT_A}{P_B}$$

Ma allora

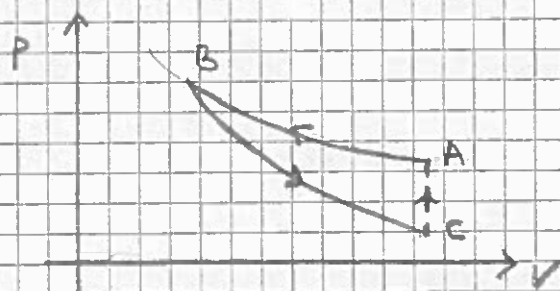
$$\Delta S_{\text{CD}} = 0.65 \text{ J/K}$$

ESERCIZIO

Un cilindro, chiuso da un pistone scorrevole senza attrito e contenente 3 moli di gas ideale biatomico, si trova in equilibrio termico con una massa $m = 1 \text{ kg}$ d'acqua a $T_0 = 373.2 \text{ K}$. Il gas viene compresso in modo isotermo reversibile, sempre a contatto con l'acqua, in modo che il suo volume si riduce a $1/3$ del volume iniziale. Una adiabatica reversibile riporta il gas al suo volume iniziale e infine anche la temperatura viene riportata a T_0 ponendolo nuovamente in contatto termico con l'acqua, mantenendo costante il volume.

Sia $L_f = 22.5 \times 10^5 \text{ J/kg}$ il calore latente di evaporazione dell'acqua. Si determini:

- Il lavoro richiesto per ogni ciclo
- quanti moli sono necessari per far evaporare tutta l'acqua
- le variazioni di entropia del gas e dell'acqua durante l'isocora
- l'energia inutilizzabile in un ciclo



$$\gamma = \frac{7}{5}$$

$$C_V = \frac{5}{2} R$$

Il lavoro richiesto per ogni ciclo è la somma dei lavori delle singole trasformazioni:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$$

↳ nullo perché isocora

Poi troviamo da L_{AB} . Essendo AB isoterma, avremo:

$$\begin{aligned} L_{AB} = Q_{AB} &= \int_A^B p dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = \\ &= nRT_0 \ln \frac{V_B}{V_A} = nRT_0 \ln \left(\frac{1}{3} \right) = -10226 \text{ J} \end{aligned}$$

Questo è calore CEDUTO dal gas all'acqua (o lavoro SUBITO dal gas). Per la trasformazione BC avremo invece:

$$Q_{BC} = 0 \Rightarrow L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nC_V (T_C - T_B)$$

Dove T_C può essere calcolata sapendo che BC è una trasformazione adiabatica:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} = T_C V_A^{\gamma-1}$$

Da cui:

$$T_C = T_B \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(\frac{1}{3} \right)^{\gamma-1} = 240.5 \text{ K}$$

Ma allora:

$$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = 8270 \text{ J} \quad (\text{lavoro compiuto dal gas})$$

Quindi complessivamente:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} = -1956 \text{ J} \quad (\text{subito dal gas})$$

Ma per definizione di ciclo questo è anche il calore

... calore scambiato tra gas e acqua, quindi per far evaporare
1 kg di acqua saranno necessari un numero di cicli =
pari a:

$$\text{numero cicli} = \frac{dF}{|L|} \sim 1155$$

Per calcolare la variazione di entropia dell'acqua basta
considerare che la sua temperatura rimane costante.
Quindi:

$$\Delta S_{\text{acqua}} = \int_c^A \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_0} \int_c^A dQ = -\frac{1}{T_0} Q_{CA} \leftarrow \text{calore opposto al gas}$$

Ma, essendo CA un'isocora:

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} = m c_v (T_A - T_c) = 8275 \text{ J}$$

Quindi:

$$\Delta S_{\text{acqua}} = -22.2 \text{ J/K}$$

mentre quella del gas è:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gas}} &= \int_c^A \frac{dQ}{T} = \int_c^A \frac{pdv}{T} + \int_c^A \frac{m c_v dT}{T} = \\ &= m c_v \ln \frac{T_A}{T_c} = 27.4 \text{ J/K} \end{aligned}$$

l'entropia totale sarà allora:

$$\Delta S_{\text{univ}} = \Delta S_{\text{acqua}} + \Delta S_{\text{gas}} = 5.2 \text{ J/K} > 0$$

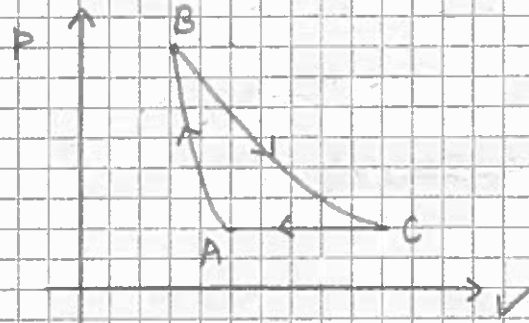
(è irreversibile infatti) l'energia inutilizzabile sarà
allora data da:

$$E_{\text{in}} = T_0 \Delta S_{\text{univ}} = 1941 \text{ J}$$

Una mole di gas perfetto biatomico inizialmente nelle condizioni $T_0 = 400 \text{ K}$, $V_0 = 0.02 \text{ m}^3$ e P_0 , subisce una trasformazione ciclica composta da: 1) una compressione adiabatica reversibile fino a raggiungere la temperatura $2T_0$; 2) un'espansione reversibile fino a P_0 ; 3) una compressione isobara reversibile che lo riporta alle condizioni iniziali.

Trovare:

- il rendimento del ciclo
- la variazione di entropia della sorgente a temperatura $2T_0$



$$\gamma = \frac{7}{5}$$

$$C_V = \frac{5}{2} R$$

* isoterma

Per determinare il rendimento consideriamo i singoli pezzi separatamente.

- AB adiabatica

$$Q_{AB} = 0 \Rightarrow L_{AB} = -\Delta U_{AB} = -mC_V(T_B - T_A) = -mC_V(2T_0 - T_0) = -mC_V T_0 = -8.3 \times 10^3 \text{ J}$$

- BC isoterma

$$\Delta U_{BC} = 0 \Rightarrow Q_{BC} = L_{BC} = mR \ln \frac{V_C}{V_B}$$

Dobbiamo quindi ricavare V_B e V_C . Per farlo, usiamo la trasformazione adiabatica:

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow T_0 V_0^{\gamma-1} = 2T_0 V_B^{\gamma-1}$$

Da cui:

$$V_B = V_0 2^{-\frac{1}{\gamma-1}} = 3.5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Invece per V_C :

$$P_C V_C = mRT_C \Rightarrow P_A V_C = mR 2T_0$$

Da cui:

$$V_C = \frac{2mRT_0}{P_A} = \frac{mRT_0}{P_0} 2 = 2V_0$$

Ma allora:

$$Q_{BC} = L_{BC} = 16 \times 10^3 \text{ J} \quad (\text{calore assorbito})$$

Per quanto riguarda l'isobara abbiamo invece:

- CA isobara

$$Q_{CA} = L_{CA} + \Delta U_{CA}$$

$$\text{da: } L_{CA} = \int_C^A p dV = P_A \int_C^A dV = P_A (V_A - V_C) = P_0 (V_0 - 2V_0) = -P_0 V_0$$

Ma dall'equazione di stato del gas perfetto:

$$-p_0 V_0 = -nRT_0 = -3.32 \times 10^3 \text{ J}$$

Invece per il calore ho:

$$Q_{CB} = L_{CA} + \Delta U_{CA} \Rightarrow \Delta U_{CA} = nC_V(T_A - T_C) = nC_V(T_0 - 2T_0) \\ = -8310 \text{ J} \quad (\text{calore ceduto})$$

Il lavoro totale sarà:

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 4380 \text{ J}$$

Il calore assorbito sarà quello lungo il tratto BC, quindi:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} = \frac{L_{TOT}}{Q_{BC}} \approx 0.3 = 30\%$$

La sorgente a temperatura $2T_0$ è quella rispetto alla quale il sistema è in contatto durante l'isoterma BC. Essendo quest'ultima una trasformazione reversibile, avremo:

$$\Delta S_{univ} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorgente} = 0$$

Ma allora:

$$\Delta S_{sorgente} = -\Delta S_{gas} = -\int_B^C \frac{dQ}{T} = -\frac{1}{2T_0} Q_{BC} = -20.7 \text{ J/K}$$