Quarto scritto- 5 Settembre 2022

Esercizio 1

Una carica totale $Q = 1.5 \times 10^{-5}$C è uniformemente distribuita su di un anello di raggio $R = 3\,\mathrm{cm}$ e sezione trascurabile, come mostrato in figura 1.

- Determinare il campo elettrico lungo l'asse di simmetria dell'anello (**4 punti**).
- Individuare i punti lungo l'asse di simmetria dove il modulo del campo elettrico è massimo (**3 punti**).

Un punto materiale di massa $m = 1\,\mathrm{g}$ e carica elettrica $q = -2 \times 10^{-6}$C viene posto a riposo lungo l'asse di simmetria dell'anello ad una distanza d dal centro.

- Dimostrare che per $d \ll R$ il punto materiale è soggetto ad una forza approssimativamente armonica e determinare il periodo delle piccole oscillazioni (**4 punti**).

Costante dielettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\mathrm{F\,m^{-1}}$.

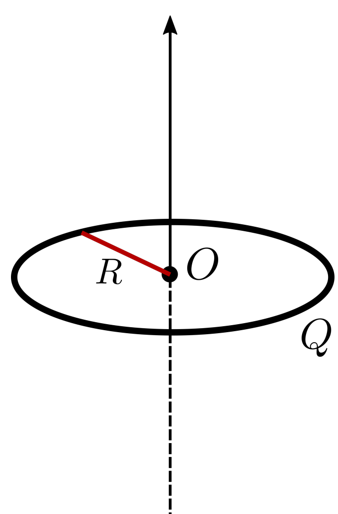

Figura 1

Esercizio 2

In un piano sono presenti una spira conduttrice a forma di triangolo equilatero di lato $L = 5\,\mathrm{cm}$, ed un filo conduttore rettilineo ed infinito, come mostrato in figura 2. Il filo conduttore si trova a distanza $d = 8\,\mathrm{cm}$ dal vertice A della spira ed è percorso da una corrente variabile nel tempo $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$, con $i_0 = 2\,\mathrm{A}$ e $\tau = 1\,\mathrm{s}$. Il lato $B - C$ della spira è parallelo al filo conduttore.

- Determinare il campo magnetico $\vec{B}(t)$ prodotto dal filo al tempo t, in funzione della distanza dall'asse del filo (**2 punti**).
- Determinare il flusso del campo magnetico $\phi_B(t)$ al tempo t, concatenato alla spira (**6 punti**).
- Determinare la resistenza R della spira sapendo che al tempo $t = \tau$ la corrente indotta nella spira vale $i_{ind}(t = \tau) = 1.85 \times 10^{-9}$ A (**3 punti**).

Permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$.

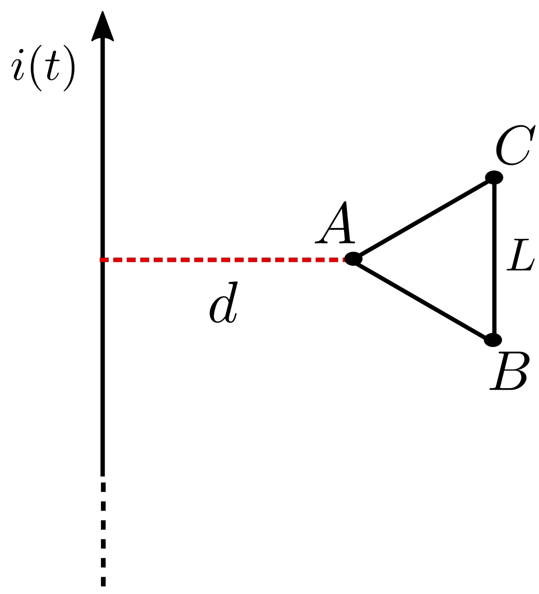

Figura 2

Esercizio 3

Una sbarretta conduttrice di lunghezza $L = 30\,\mathrm{cm}$ e massa $m = 20\,\mathrm{g}$, può muoversi senza attrito lungo due binari conduttori, formando un circuito chiuso con resistenza complessiva $R = 0.2\,\Omega$. Nel piano del circuito è presente un campo magnetico $B = 1\,\mathrm{T}$ uniforme, perpendicolare al piano del foglio e con verso uscente. Come indicato in figura 3, la sbarretta conduttrice è collegata, tramite una molla di costante elastica $k = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ e lunghezza a riposo ℓ, al lato $A-B$ del circuito. La molla è costituita da materiale isolante. Si supponga che le condizioni iniziali siano tali per cui la sbarretta non raggiunga mai il lato $A - B$ del circuito.

- Determinare la corrente $i(t)$ indotta nella sbarretta al tempo t in funzione della sua velocità $v(t)$ (**3 punti**).

- Avendo indicato con $x(t)$ la posizione orizzontale della sbarretta rispetto al lato $A - B$ del circuito, dimostrare che la sbarretta conduttrice compie un moto armonico smorzato descritto da:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot (x(t) - \ell) - \gamma \frac{\partial x(t)}{\partial t} \ ,$$

  e determinare il valore di ω e γ (**5 punti**).

- Sapendo che l'equazione precedente ha come soluzione generale:

$$x(t) = \ell + Ae^{-t/\tau} \cdot \cos(\omega' t + \phi) \ ,$$

  determinare il valore del tempo di smorzamento τ e della pulsazione ω' in funzione di ω e γ (**3 punti**).

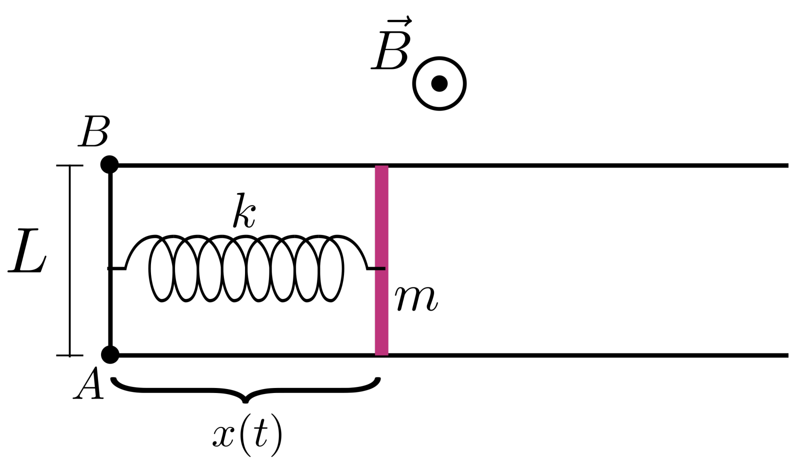

Figura 3

Soluzione Esercizio 1

Per simmetria, il campo elettrico lungo l'asse di simmetria dell'anello (che indicheremo con asse $\hat{x}$) è diretto anch'esso lungo l'asse. Sia x la coordinata lungo l'asse $\hat{x}$ del punto P in cui calcoliamo il campo elttrico, avendo scelto l'origine dell'asse $\hat{x}$ coincidente con il centro dell'anello. Il contributo di un tratto infinitesimo $d\ell$ di anello alla componente x del campo elettrico lungo l'asse di simmetria è dato da:

$$dE_x(x) = \sigma \frac{d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \ ,$$

dove $\sigma d\ell = \frac{Q}{2\pi R} d\ell$ è la carica elettrica del tratto infinitesimo $d\ell$ di anello, r è la distanza del punto P dal tratto infinitesimo $d\ell$ e θ è l'angolo formato dall'asse $\hat{x}$ con il vettore che va dal tratto infinitesimo $d\ell$ al punto P. In funzione di x, si ha:

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \ ,$$

e pertanto

$$dE_x(x) = \sigma \frac{d\ell}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \ .$$

Il campo elettrico totale è ottenuto integrando dE_x su tutto l'anello. Si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) = \hat{x} \int dE_x(x) &= \int_0^{2\pi R} d\ell \ \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x} \ . \end{aligned}$$

Il campo elettrico è zero per $x = 0$ e per $|x| = \infty$. Per trovare i punti dove il modulo del campo elettrico è massimo imponiamo $d|\vec{E}(x)|/dx = 0$. Si ha:

$$\frac{d|\vec{E}(x)|}{dx} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{(x^2 + R^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + R^2)^{5/2}} \right] = 0 \ ,$$

che implica

$$3x^2 = x^2 + R^2 \implies x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}} \ .$$

Per $x \ll R$, possiamo approssimare:

$$(x^2 + R^2)^{3/2} \sim R^3 \implies \vec{E}(x) \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{x} \ .$$

La forza $\vec{F}$ agente sul punto materiale di massa m e carica elettrica q (essendo $d \ll R$) può essere pertanto approssimata come:

$$\vec{F} = m\vec{a} \sim -\frac{|q|Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\vec{x} \ ,$$

che da luogo ad un moto armonico con pulsazione ω data da:

$$\omega^2 = \frac{|q|Q}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \ .$$

Il periodo T delle piccole oscillazioni è dato pertanto da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi^{3/2} R^{3/2} \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{|q|Q}} \sim 1.99 \times 10^{-3} \text{ s} \ .$$

Soluzione Esercizio 2

Per simmetria, il modulo del campo magnetico generato dal filo conduttore dipende soltanto dalla distanza r dall'asse. Inoltre, detto $\hat{y}$ il versore parallelo al filo conduttore, si ha che la direzione del campo magnetico è data da $\hat{u}_\phi = \hat{y} \times \hat{u}_r$, dove $\hat{u}_r$ è il versore ortogonale a $\hat{y}$ diretto come la congiungente tra l'asse del filo e il punto P in cui calcoliamo il campo magnetico. Per calcolare il modulo del campo magnetico ad una distanza r dall'asse del filo, applichiamo il teorema di Ampere. Detta $C(r)$ la circonferenza di raggio r il cui centro passa per il filo conduttore e che giace nel piano ortogonale al filo, si ha:

$$\int_{C(r)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = |B(r)| 2\pi r = \mu_0 i(t) \implies |B(r)| = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \ ,$$

dove $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ è la corrente passante nel filo al tempo t. Calcoliamo ora il flusso del campo magnetico $\phi_B(t)$ concatenato alla spira al tempo t. Per farlo scegliamo un sistema di assi centrato nel vertice A della spira. Come prima, indichiamo con $\hat{y}$ l'asse parallelo al filo, e con $\hat{x}$ l'asse ortogonale a $\hat{y}$ nel piano della spira. Chiaramente in questo sistema di assi cartesiani il campo magnetico $\vec{B}$ generato dal filo dipende soltanto dalla coordinata x. Il flusso del campo magnetico è dato da ($\theta = \pi/3$):

$$\phi_B(t) = \int_0^{L\cos\frac{\theta}{2}} dx \int_{-x\tan\frac{\theta}{2}}^{x\tan\frac{\theta}{2}} dy \; \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi(d+x)}$$

$$= \frac{\mu_0 i(t)}{\pi} \tan\frac{\theta}{2} \int_0^{L\cos\frac{\theta}{2}} dx \; \frac{x}{x+d}$$

$$= \frac{\mu_0 i(t)}{\pi} \tan\frac{\theta}{2} \cdot \left(L\cos\frac{\theta}{2} - d\log\left(x+d\right)\Big|_0^{L\cos\frac{\theta}{2}} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 i(t)}{\pi} \tan\frac{\theta}{2} \cdot \left(L\cos\frac{\theta}{2} - d\log\left(1 + \frac{L\cos\frac{\theta}{2}}{d}\right)\right)$$

$$= \frac{\mu_0 i(t)}{\pi} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{d}{\sqrt{3}}\log\left(1 + \frac{\sqrt{3}L}{2d}\right)\right) \; .$$

La f.e.m. indotta $\mathcal{E}(t)$ al tempo t è data, per la legge di Faraday, da:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \phi_B(t)}{\partial t} = e^{-t/\tau}\frac{\mu_0 i_0}{\tau\pi} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{d}{\sqrt{3}}\log\left(1 + \frac{\sqrt{3}L}{2d}\right)\right) \; .$$

La corrente indotta al tempo $t = \tau$ è data pertanto da:

$$i_{ind}(\tau) = \frac{\mathcal{E}(\tau)}{R} = \frac{\mu_0 i_0}{eR\tau\pi} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{d}{\sqrt{3}}\log\left(1 + \frac{\sqrt{3}L}{2d}\right)\right) \; ,$$

da cui sapendo che $i_{ind}(\tau) = 1.85 \times 10^{-9}$ A si ottiene $R \sim 0.8\,\Omega$.

Soluzione Esercizio 3

Detta $x(t)$ la posizione orizzontale della sbarretta conduttrice rispetto al lato $A - B$ del circuito, si ha che il flusso del campo magnetico è dato da:

$$\phi_B(t) = Bx(t)L \; ,$$

e quindi per la legge di Faraday la f.e.m. indotta è:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \phi_B(t)}{\partial t} = -BL\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -BLv(t) \; .$$

La corrente indotta $i(t)$ in funzione di $v(t)$ è quindi data da:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{BL}{R}v(t) \; .$$

Dal momento che nella sbarretta conduttrice scorre una corrente $i(t)$, ed essendo il sistema immerso in un campo magnetico, si ha che sulla sbarretta agisce una forza magnetica data da:

$$F_m = -\frac{B^2L^2}{R} v(t) \ .$$

Considerando anche la forza eleastica $F_e = -k \cdot (x(t) - \ell)$ dovuta alla molla, si ha che il moto della sbarretta è descritto da:

$$ma(t) = m\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = F_e + F_m = -k \cdot (x(t) - \ell) - \frac{B^2L^2}{R} v(t) \ ,$$

che implica

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\frac{k}{m} \cdot (x(t) - \ell) - \frac{B^2L^2}{mR} \cdot \frac{\partial x(t)}{\partial t} \ . \tag{1}$$

La forza magnetica si oppone sempre al moto della sbarretta. Il moto complessivo è quello di un oscillatore armonico smorzato con $\omega = \sqrt{k/m} \sim \ 70.7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ e smorzamento $\gamma = B^2L^2/(mR) \sim 22.5\,\mathrm{s^{-1}}$. Per rispondere all'ultimo quesito è sufficiente sostituire la soluzione generale

$$x(t) = \ell + Ae^{-t/\tau} \cos(\omega' t + \phi) \ ,$$

in Eq. (1). Per la derivata prima e seconda di $x(t)$ si ha:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -\frac{A}{\tau} e^{-t/\tau} \cos(\omega' t + \phi) - A\omega' e^{-t/\tau} \sin(\omega' t + \phi) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} &= \frac{A}{\tau^2} e^{-t/\tau} \cos(\omega' t + \phi) + 2\frac{\omega'}{\tau} Ae^{-t/\tau} \sin(\omega' t + \phi) \\ &- \omega'^2 Ae^{-t/\tau} \cos(\omega' t + \phi) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

per cui Eq. (1) diventa:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau^2} \cos(\omega' t + \phi) + 2\frac{\omega'}{\tau} \sin(\omega' t + \phi) - \omega'^2 \cos(\omega' t + \phi) = \\ &= -\omega^2 \cos(\omega' t + \phi) + \gamma \cdot \left(\frac{1}{\tau} \cos(\omega' t + \phi) + \omega' \sin(\omega' t + \phi) \right) \ . \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti di seno e coseno nei due membri, si ha:

$$\begin{aligned} &2\frac{\omega'}{\tau} = \gamma\omega' \implies \tau = \frac{2}{\gamma} \sim 0.089\,\mathrm{s} \ , \\ &\omega'^2 = \omega^2 + \frac{1}{\tau^2} - \frac{\gamma}{\tau} = \omega^2 - \frac{\gamma^2}{4} \implies \omega' \sim 69.81\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \ . \end{aligned}$$