Scritto- 18 Gennaio 2022

Esercizio 1

Due punti materiali di masse $m_1 = 1\,\text{kg}$ ed $m_2 = 2\,\text{kg}$ si trovano su due piani inclinati come mostrato in figura 1 e sono collegati attraverso una fune inestensibile e di massa trascurabile. Il coefficiente d'attrito dinamico tra il punto materiale di massa m_2 e la superficie su cui si muove è dato da $\mu_d = 0.3$, mentre la superficie su cui si muove il punto materiale di massa m_1 è liscia.

$[\theta_1 = 30^\circ\ ,\ \theta_2 = 45^\circ]$

- Calcolare l'accelerazione a del sistema e la tensione T della fune (**5 punti**).
- Assumendo ora che tra il punto materiale di massa m_1 e la superficie su cui si muove ci sia attrito, calcolare il corrispondente coefficiente d'attrito dinamico μ'_d affinchè la nuova accelerazione del sistema valga $a' = a/2$ (**6 punti**).

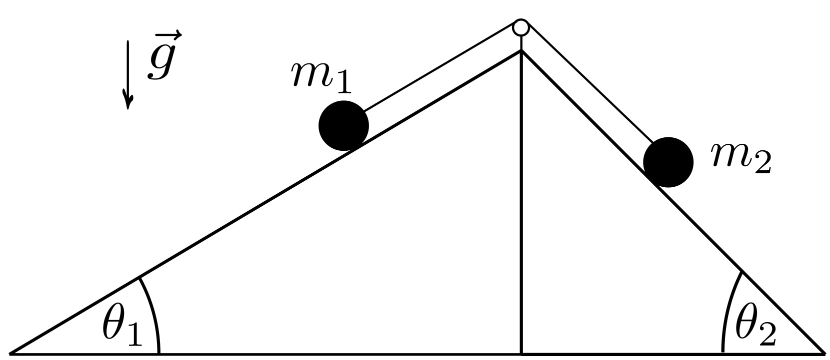

Figura 1

Esercizio 2

Un'asta sottile ed omogenea di massa $M = 4\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $L = 1\,\mathrm{m}$ è libera di ruotare intorno al polo O mostrato in figura 2. L'asta è inizialmente in quiete ed è disposta lungo la verticale. Un punto materiale di massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ urta l'asta nel suo estremo più basso. La velocità del punto materiale nel momento dell'impatto è $v_0 = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ed è diretta come in figura 2. L'urto è completamente anelastico ed istantaneo. Calcolare:

- Il momento d'inerzia del sistema dopo l'urto rispetto all'asse passante per il punto O e perpendicolare al piano. (**2 punti**).
- La velocità angolare del sistema ω_0 subito dopo l'urto (**4 punti**).
- L'angolo massimo raggiunto dal sistema (**5 punti**).

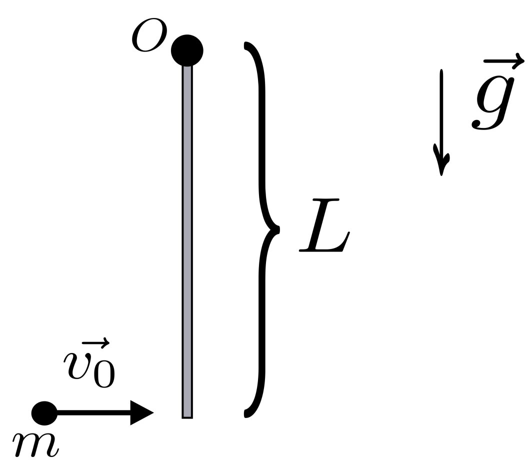

Figura 2

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto biatomico si trova inizialmente in equilibrio termico a temperatura $T_A = 100\,\mathrm{K}$ e occupa un volume $V_A = 1\,\mathrm{m}^3$. Il gas subisce una trasformazione isocora reversibile $A-B$ che lo porta a temperatura $T_B = 200\,\mathrm{K}$ seguita da una trasformazione irreversibile $B-C$ che lo porta in uno stato di equilibrio caratterizzato da una temperatura $T_C = 300\,\mathrm{K}$ ed un volume $V_C = 2\,\mathrm{m}^3$. Le due trasformazioni sono schematizzate nel piano $P-V$ in figura 3. Calcolare:

- Il calore Q_{AB} scambiato dal gas nella trasformazione isocora $A-B$ (**3 punti**).
- La variazione di entropia del gas ΔS_{AB} nella trasformazione isocora $A-B$ (**3 punti**).
- La variazione di entropia del gas ΔS_{BC} nella trasformazione irreversibile $B-C$ (**5 punti**).

$\left(R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}\right)$.

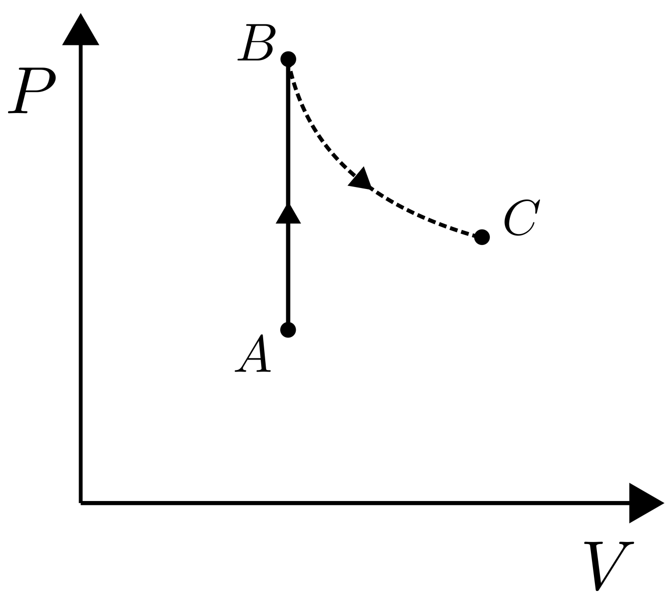

Figura 3

Soluzione Esercizio 1

Le forze agenti sul blocco di massa m_1 lungo la direzione del moto sono la tensione T della fune e la componente della forza peso parallela al piano inclinato, mentre sul blocco di massa m_2 agisce la tensione della fune T, la componente della forza peso parallela al piano inclinato e la forza d'attrito. Indicando con a l'accelerazione del sistema, si ha:

$$\begin{cases} m_2 \cdot a &= m_2 \cdot g \sin\theta_2 - T - F_d \\ m_1 \cdot a &= T - m_1 \cdot g \sin\theta_1 \end{cases} \tag{1}$$

dove $F_d = \mu_d N = \mu_d m_2 g \cos\theta_2$ è il modulo della forza di attrito dinamico. Sommando membro a membro le due equazioni precedenti si ha:

$$(m_1 + m_2)a = g(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1) - \mu_d m_2 g \cos\theta_2 \ , \tag{2}$$

da cui

$$a = \frac{g}{m_1 + m_2} \left(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1 - \mu_d m_2 \cos\theta_2\right) \simeq 1.60 \,\mathrm{ms}^{-2} \ . \tag{3}$$

La tensione della fune è data da:

$$T = m_1 \left(a + g \sin\theta_1\right) \simeq 6.5 \,\mathrm{N} \ . \tag{4}$$

Se è presente un coefficiente d'attrito dinamico non nullo μ'_d tra il punto materiale di massa m_1 e la superficie su cui si muove, allora l'accelerazione a' del sistema è data da

$$a' = \frac{g}{m_1 + m_2} \left(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1 - \mu_d m_2 \cos\theta_2 - \mu'_d m_1 \cos\theta_1\right) \ . \tag{5}$$

Richiedendo $a' = a/2$, si ha:

$$\begin{aligned} \mu'_d m_1 \cos\theta_1 &= \frac{1}{2} \left(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1 - \mu_d m_2 \cos\theta_2\right) \\ \Longrightarrow \ \mu'_d &= \frac{1}{2} \frac{\left(m_2 \sin\theta_2 - m_1 \sin\theta_1 - \mu_d m_2 \cos\theta_2\right)}{m_1 \cos\theta_1} \simeq 0.28 \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Soluzione Esercizio 2

Il momento d'inerzia di un'asta sottile ed omogenea di massa M e lunghezza L, in rotazione rispetto ad un asse perpendicolare passante per il suo centro di massa, è dato da:

$$I_{cm} = \frac{ML^2}{12} \ . \tag{7}$$

Per determinare il momento d'inerzia I_{asta} dell'asta rispetto all'asse di rotazione passante per il punto O, è sufficiente utilizzare il teorema di Huygens-Steiner. Si ha quindi:

$$I_{asta} = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\left(\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4}\right) = \frac{ML^2}{3} \ . \tag{8}$$

Aggiungendo il contributo del punto materiale di massa m si ha quindi che il momento d'inerzia totale del sistema dopo l'urto è dato da:

$$I = I_{asta} + mL^2 = \frac{ML^2}{3} + mL^2 \simeq 3.33\,\mathrm{kg \cdot m^2} \ . \tag{9}$$

Per calcolare la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto utilizziamo il fatto che nell'urto istantaneo si conserva il momento angolare calcolato rispetto al polo O. Le uniche forze esterne agenti sul sistema sono la forza vincolare esercitata sul polo O e la forza peso. La prima non produce mai un momento torcente se lo calcoliamo scegliendo come polo il punto O, mentre la forza peso non produce una variazione di momento angolare nell'urto istantaneo. Detta ω_0 la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, si ha pertanto:

$$I\omega_0 = mv_0L \implies \omega_0 = \frac{mv_0L}{I} = \frac{v_0}{L} \cdot \frac{1}{1 + \frac{M}{3m}} = 1.2\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \tag{10}$$

Per calcolare l'angolo massimo θ raggiunto dal sistema utilizziamo invece la conservazione dell'energia totale. Subito dopo l'urto l'energia totale è data da:

$$E_{in} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - Mg\frac{L}{2} - mgL \ , \tag{11}$$

dove abbiamo preso lo zero dell'energia potenziale all'altezza del polo O. Nel momento in cui il sistema raggiunge l'altezza massima, l'energia cinetica è nulla e si ha:

$$E_{fin} = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta - mgL\cos\theta \ , \tag{12}$$

dove θ è l'angolo formato dall'asta con la verticale. Imponendo $E_{in} = E_{fin}$, si trova:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = (1-\cos\theta) \cdot \frac{gL}{2} \cdot (M + 2m) \implies \cos\theta = 1 - \frac{I\omega_0^2}{gL(M+2m)} \ . \tag{13}$$

Utilizzando i dati del problema si ottiene $\theta \simeq 20°$.

Soluzione Esercizio 3

Nella isocora $A - B$, dal momento che il volume del gas non cambia, il calore scambiato Q_{BC} è uguale alla variazione di energia interna del gas, ovvero:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nc_v(T_B - T_A) \ . \tag{14}$$

Per un gas perfetto biatomico $c_v = \frac{5}{2}R$, pertanto

$$Q_{AB} \simeq 2078\,\mathrm{J} \ . \tag{15}$$

La variazione di entropia nella trasformazione isocora $A - B$ è data da:

$$\Delta S_{AB} = nc_v \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_v \ln 2 \simeq 14.41\,\mathrm{J\,K^{-1}} \ . \tag{16}$$

Per calcolare invece la variazione di entropia ΔS_{BC} nella trasformazione irreversibile $B-C$, dobbiamo calcolare l'integrale di Clausius $\int \frac{dQ}{T}$ lungo una qualsiasi trasformazione reversibile che va dal punto B al punto C. La variazione infinitesima di entropia di un gas perfetto è data da:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T}dV = nc_v\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V} \ , \tag{17}$$

pertanto integrando la variazione di entropia infinitesima lungo una qualsiasi trasformazione reversibile che va da B a C si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta S_{BC} &= nc_v \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} \\ &= nc_v \log \frac{T_C}{T_B} + nR \log \frac{V_C}{V_B} = nc_v \log \frac{3}{2} + nR \log 2 \simeq 14.2\,\mathrm{J\,K^{-1}} \ . \end{aligned} \tag{18}$$