Prova Scritta - 17 Gennaio 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

La distribuzione di carica considerata non ha simmetria sferica. Si può tuttavia decomporre in due distribuzioni a simmetria sferica: una di densità ρ_1, centro O e raggio R e una di densità $\rho_2 - \rho_1$, centro C e raggio $R/3$. Per ottenere il campo conviene considerare la sovrapposizione dei contributi di queste due distribuzioni. Cominciamo considerando il campo in O. Questo sarà determinato solo dalla distribuzione di densità $\rho_2 - \rho_1$ perchè il contributo dell'altra è nullo. La carica totale di questa distribuzione vale

$$Q_C = (\rho_2 - \rho_1)\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{81}(\rho_2 - \rho_1)R^3\,. \tag{1}$$

Il campo in O sarà dunque quello generato da una carica puntiforme Q_C, posta in C, a distanza $R/2$ ossia

$$\mathbf{E}(O) = \frac{-Q_C}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R/2)^2}\,\hat{\mathbf{x}} = -\frac{4}{81\epsilon_0}(\rho_2 - \rho_1)R\,\hat{\mathbf{x}}\,. \tag{2}$$

Secondo un analogo ragionamento, il campo generato nel punto C dipenderà invece esclusivamente dalla distribuzione di carica di densità ρ_1 e dal campo che essa genererà ad una distanza $R/2$. La carica di questa distribuzione racchiusa entro una superficie sferica di raggio $R/2$ vale

$$Q_O\left(\frac{R}{2}\right) = \rho_1\frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}\rho_1 R^3\,. \tag{3}$$

Per il teorema di Gauss il campo cercato vale quindi

$$\mathbf{E}(C) = \frac{Q_O}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(R/2)^2}\,\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{6\epsilon_0}\rho_1 R\,\hat{\mathbf{x}}\,. \tag{4}$$

La carica totale della distribuzione di densità ρ_1 vale

$$Q_O^{tot} = \rho_1\frac{4\pi}{3}R^3\,, \tag{5}$$

quindi per avere carica totale nulla deve valere $Q_C + Q_O^{tot} = 0$, ossia

$$\frac{4\pi}{81}(\rho_2 - \rho_1)R^3 = -\rho_1\frac{4\pi}{3}R^3\,. \tag{6}$$

Questo si verifica per $\rho_2 = -26\rho_1$.
Nel caso considerato, abbiamo una distribuzione di carica a simmetria sferica di centro O e carica totale $Q_O^{tot} > 0$ ed una distribuzione di carica a simmetria sferica di centro C e carica totale $Q_C = Q_O^{tot} < 0$. La distanza tra i centri delle due distribuzioni di carica vale $R/2$. Il momento di dipolo del sistema è quindi

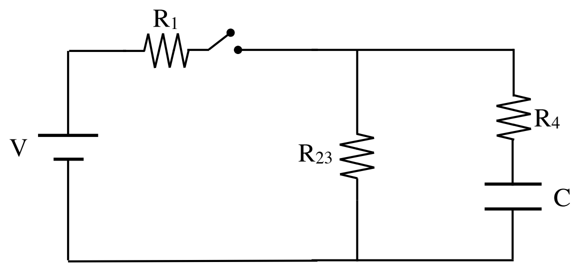
$$\mathbf{p} = -Q_O^{tot}\frac{R}{2}\,\hat{\mathbf{x}} = -\frac{2\pi\rho_1 R^4}{3}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{7}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per prima cosa conviene semplificare il circuito sostituendo alle due resistenze R_2 e R_3 la loro combinazione in parallelo R_{23},

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 0.25\,k\Omega\,. \tag{8}$$

Il circuito così semplificato appare ora come



Nella situazione iniziale (interruttore chiuso), nel ramo di circuito contenente il condensatore non scorre alcuna corrente, il condensatore è infatti completamente carico. Essendo sullo stesso ramo del condensatore, neppure attraverso la resistenza R_4 scorre alcuna corrente, ed è dunque nulla la d.d.p. ai suoi capi. La corrente scorre solamente nella maglia di sinistra.
Quando l'interruttore viene aperto la corrente smette di attraversare il ramo che lo contiene, il condensatore a sua volta smette di sentire la d.d.p. del generatore e comincia a scaricarsi facendo circolare una corrente nella sola maglia di destra. Si noti a questo punto che la maglia di destra corrisponde ad un circuito RC che non contiene un generatore e in cui la resistenza complessiva R_{tot} è data da

$$R_{tot} = R_{23} + R_4\,. \tag{9}$$

La costante di tempo τ che governa la scarica del condensatore è data dal prodotto $R_{tot}C$ e pertanto vale

$$\tau = R_{tot}C = 0.15\,s\,. \tag{10}$$

La tensione ai capi del condensatore, V_C, varierà secondo la legge esponenziale

$$V_C(t) = V_C(0)e^{-t/\tau}\,, \tag{11}$$

pertanto dopo un tempo $t = \tau$ la tensione ai capi del condensatore sarà pari a

$$V_C(\tau) = \frac{V_C(0)}{e}\,. \tag{12}$$

Resta quindi da determinare $V_C(0)$ ossia la tensione ai capi di C al momento dell'apertura dell'interruttore. Per determinare il valore di $V_C(0)$, notiamo che all'istante in cui inizia la scarica del condensatore, fra le armature è presente la stessa d.d.p. esistente ai capi della resistenza R_{23}: questo perchè come già notato fino a quando il condensatore è carico, nel suo ramo circuitale non scorre alcuna corrente, e dunque non si osserva nessuna caduta di potenziale attraverso la resistenza R_4. Per determinare la d.d.p. esistente ai capi della resistenza R_{23} quando l'interruttore è chiuso è sufficiente invece considerare la sola maglia di sinistra. La corrente che scorre nel circuito è pari a

$$I = \frac{V}{R_1 + R_{23}} \tag{13}$$

pertanto le due d.d.p ai capi di R_1 e R_{23} varranno rispettivamente

$$V_1 = IR_1 = \frac{R_1 V}{R_1 + R_{23}} \qquad V_{23} = IR_{23} = \frac{R_{23}V}{R_1 + R_{23}}\,. \tag{14}$$

La tensione ai capi di C dopo un tempo $t = \tau$ è dunque pari a

$$V_C(\tau) = \frac{V_{23}}{e} = \frac{R_{23}V}{e(R_1 + R_{23})} = 1\,V\,. \tag{15}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Il flusso concatenato varia nel tempo perchè l'area della spira varia a causa del moto di discesa della sbarretta. Questo genera una f.e.m. indotta. Per il calcolo del flusso bisogna inoltre osservare che il campo non è perpendicolare all'area della spira. Con un'opportuna scelta del sistema di riferimento il flusso può essere calcolato con la seguente formula

$$\Phi\left(x\right) = lBx\cos\alpha\,. \tag{16}$$

La f.e.m. vale quindi

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} = lBv\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{40}v\,. \tag{17}$$

Per la corrente che circola nella spira a causa della variazione di campo magnetico avremo invece

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{lBv\cos\alpha}{R} = -\frac{\sqrt{3}}{4}v\,. \tag{18}$$

Visto che il moto della sbarretta tende ad aumentare il flusso concatenato, guardando il piano inclinato dall'alto si vede circolare la corrente in verso orario.
La sbarretta, essendo percorsa da corrente subirà una forza, perpendicolare a B e alla corrente, tale da frenare il suo moto. La velocità limite si avrà quando la componente lungo il piano della spira della forza di frenamento elettromagnetico bilancerà la componente lungo il piano della forza peso. In formule

$$ma = mg\sin\alpha + iBl\cos\alpha = 0 \tag{19}$$

dunque

$$mg\sin\alpha = \frac{l^2B^2v_{lim}\cos^2\alpha}{R}\,. \tag{20}$$

Otteniamo quindi in conclusione

$$v_{lim} = \frac{gmR}{l^2B^2}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 2.62\,m/s \tag{21}$$