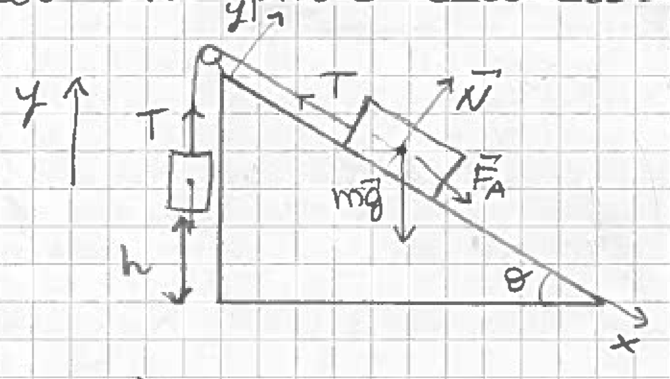
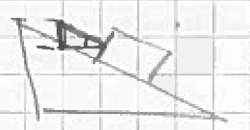
ESERCIZIO

Due masse uguali sono collegate da un filo come in figura. Il piano è inclinato di 30°, il coefficiente di attrito è $\mu = 0.4$, l'altezza h vale 1 m. Al tempo $t=0$ il sistema viene lasciato libero di muoversi: calcolare la distanza d percorsa in salita dalla masse che si trova sul piano e calcolare l'accelerazione.



$\theta = 30°$ $h = 1\,m$

$\mu = 0.4$



Applichiamo il secondo principio della dinamica al corpo sospeso (la massa m è uguale):

$$T - mg = ma$$

Da cui:

$$T = m(g + a)$$

Per il corpo sul piano inclinato ho invece:

$$\begin{cases} \mu N - T + mg\,\text{sen}\,\theta = ma \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima ricavo N:

$$N = mg\cos\theta$$

quindi l'altra diventa:

$$\mu mg\cos\theta - mg - ma + mg\,\text{sen}\,\theta = ma$$

Da cui ricavo:

$$2\cancel{m}a = \cancel{m}g\left[\mu\cos\theta + \text{sen}\,\theta - 1\right]$$

E infine:

$$a = \frac{g}{2}\left[\mu\cos\theta + \text{sen}\,\theta - 1\right] = -0.75\ m/s^2$$

(il fatto che a è negativa sta a significare che il moto avviene in direzione opposta all'asse scelto, come potevo aspettarmi dalla traccia)

Voglio ora calcolare la distanza d percorsa dalla massa in salita sul piano. Poiché la corda è tesa essa sarà uguale alla distanze percorsa dall'altra massa fino a che tocca terra sommata alla distanza Δx percorsa dopo che il corpo sospeso ha toccato terra (in questo caso, poiché la corda smette di essere tesa, i due corpi non sono più vincolati).

Il corpo sospeso tocca terra quando:

$$h = \frac{1}{2} a \tilde{t}^2 \longrightarrow \tilde{t} = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

In questo istante la sua velocità vale:

$$v = a\tilde{t} = \sqrt{2ha}$$

Se il corpo sul piano inclinato sale di Δx, la sua quota rispetto a terra varierà di $\Delta x \,\text{sen}\,\theta$. Posso allora scrivere la variazione di energia meccanica come:

$$E_{in} = \frac{1}{2} m v^2 + mgh_{in}, \quad E_{fin} = mgh_{fin} \quad . \; L = \mu N \Delta x \quad (*)$$

Quindi:

$$mgh_{fin} = mgh_{in} + \frac{1}{2} m v^2 - \mu m g \cos\theta \Delta x \quad ; \; h_{fin} - h_{in} = \Delta \,\text{sen}\,\theta$$

$$\hookrightarrow mg\Delta x \,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2} m v^2 - \mu m g \cos\theta \Delta x$$

Ma allora:

$$\Delta x = \frac{1/2\, m v^2}{mg(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)} = \frac{mha}{mg(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)} =$$

$$= \frac{h(1 - \text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)}{2(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)} = \frac{h}{2}\left[\frac{1}{\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta} - 1\right] = 0.09\,m$$

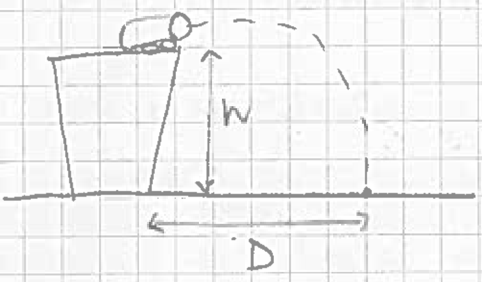
Notiamo che nella (*) abbiamo supposto che la velocità del corpo sul piano inclinato sia la stessa del corpo sospeso (fino a quell'istante i corpi sono legati).

Ma allora:

$$d = h + \Delta x = 1.09\,m$$

ESERCIZIO

Un cannone di massa M spara in orizzontale, dalla cima di una torre di altezza h, un proiettile di massa m che raggiunge il suolo ad una distanza D dalla base della torre. Calcolare la forza che serve ad arrestare il cannone dopo aver percorso un tratto d.



$M = 500\ kg \qquad m = 12\ kg$

$D = 800\ m \qquad h = 350\ m$

$d = 2\ m$

Sul sistema non agiscono forze esterne, quindi la quantità di moto totale si conserva:

$$MV = mv \quad (*)$$

dove v è la velocità del proiettile e V quella di rinculo del cannone. Per ricavare v possiamo usare le equazioni del moto del proiettile:

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} D = v\tilde{t} \\ h = \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \end{cases}$$ con $\tilde{t}$ istante in cui il proiettile tocca terra

Ma allora:

$$\tilde{t} = \frac{D}{v} \longrightarrow h = \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v^2}$$

Da cui:

$$v = \sqrt{\frac{gD^2}{2h}} = 94.6\ m/s$$

Dalla $(*)$ avremo:

$$V = \frac{m}{M}v = 2.27\ m/s$$

La forza che deve arrestare il cannone dopo aver percorso una distanza d compirà un lavoro pari a:

$$L = Fd$$

Esso dovrà eguagliare l'energia cinetica del cannone, perché vogliamo che quest'ultimo si fermi:

$$Fd = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}\frac{gD^2}{\ldots}$$

Da cui ricaviamo:

$$F = \frac{m^2 g D^2}{4 M h d} = 645 \, N$$

ESERCIZIO

Una particella scivola giù da un piano inclinato da una posizione di riposo ed entra in un giro della morte. Se la particella parte da un punto alla stessa altezza della sommità del percorso circolare, trovare l'altezza raggiunta la quale, la particella si staccherà dalla rotaia circolare

Consideriamo le forze in gioco in un qualsiasi istante durante il giro della morte:

Qui $\vec{R}$ è la reazione vincolare della rotaia circolare. Affinché il corpo rimanga attaccato deve valere:

$$\underbrace{mg \operatorname{sen}\theta}_{\text{componente della forza peso lungo } R} + R = \underbrace{m\frac{v^2}{r}}_{\text{accelerazione centripeta}}$$

(r raggio del cerchio)

Nel momento in cui si stacca avremo $R = 0$, quindi:

$$mg \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

ma r è legato ad h:

$$h = r \operatorname{sen}\theta \longrightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{h}{r}$$

Ma allora avremo:

$$mg\frac{h}{r} = m\frac{v^2}{r} \longrightarrow v^2 = gh$$

Questa è la velocità della particella quando il corpo si stacca. Qual è la sua velocità iniziale? Poiché so da dove parte, posso applicare la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mg(2r)$$

con v_0 velocità raggiunta alla base del cerchio:

$$v_0 = \sqrt{4gr}$$

Scriviamo allora un nuovo principio di conservazione quando la particella si trova ad altezza h dal centro del cerchio, cioè $h+r$ dalla base: è l'istante in cui abbiamo detto che si stacca,

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mg(h+r)$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 + mgh + mgr$$

Sostituiamo i valori di v_0 e v ricavati:

$$\frac{1}{\cancel{2}} \overset{2}{4} gr = \frac{1}{2} gh + gh + gr$$

Da cui:

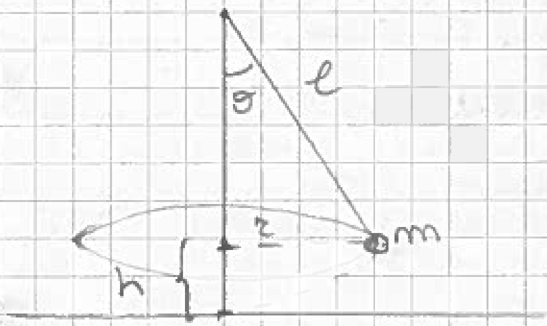
$$\frac{3}{2} gh = gr \longrightarrow h = \frac{2}{3} r$$

L'altezza totale (cioè calcolata dalla base del cerchio) sarà:

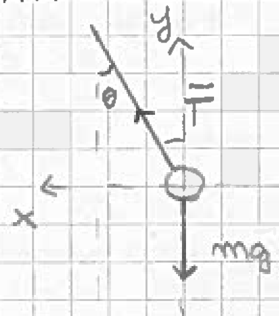
$$h + r = \frac{2}{3} r + r = \frac{5}{3} r$$

ESERCIZIO

Un pendolo conico è costituito da una massa m legata ad un filo inestensibile di lunghezza ℓ e che si muove con velocità angolare costante descrivendo una circonferenza. Sia il filo appeso ad un'altezza pari ad ℓ in modo che, se la massa è ferma e il filo verticale, la massa tocca terra. Trovare la velocità angolare necessaria affinché la massa descriva una circonferenza posta ad un'altezza h costante.



Consideriamo più in dettaglio le forze che agiscono sulla massa m:



Lungo gli assi avremo:

$$\begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta = m\dfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$\longleftarrow$ supponiamo che la massa non si muova lungo y, cioè non cambi la sua quota

Ricaviamo T dall'ultima:

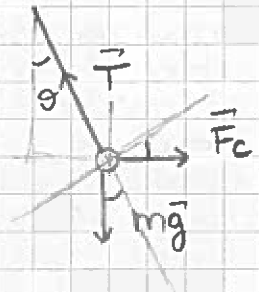
$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

e sostituiamo nella prima:

$$\cancel{m} g\,\text{tg}\,\theta = \cancel{m}\omega^2 r \longrightarrow \text{tg}\,\theta = \omega^2 r \frac{1}{g}$$

Possiamo anche provare a considerare un sistema di riferimento solidale alla massa m. In tale sistema la forza risultante dovrà essere nulla (perché il corpo dovrà risultare fermo in questo sistema), ed inoltre la massa m avvertirà la presenza di una forza centrifuga che chiamiamo F_c.

Avremo cioè:



Affinché la risultante sia nulla la somma vettoriale tra $m\vec{g}$ e $\vec{F_c}$ dovrà essere nella stessa direzione di $\vec{T}$ ma in verso opposto, e dovrà avere modulo uguale.

Ma allora posso scrivere:

$$\begin{cases} T = mg\cos\theta + F_c \operatorname{sen}\theta \\ F_c\cos\theta - mg\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

Da quest'ultima ricaviamo:

$$\frac{F_c}{mg} = tg\,\theta$$

Ma $F_c = m\omega^2 r$, quindi:

$$\frac{m\omega^2 r}{mg} = tg\,\theta \longrightarrow tg\,\theta = \frac{\omega^2 r}{g} \quad (*)$$

che è lo stesso risultato di prima.

Troviamo quindi la ω tale per cui la circonferenza descritta ha altezza h. Vale sicuramente

$$r = l\operatorname{sen}\theta$$

Ma allora dalla $(*)$ ricaviamo:

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen}\theta}}{\cos\theta} = \frac{\omega^2}{g} l \cancel{\operatorname{sen}\theta}$$

Da cui:

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}$$

L'altezza h non è altro che $l - l\cos\theta$, quindi:

$$h = l - l\cos\theta = l\,(1-\cos\theta) = l\left(1 - \frac{g}{\omega^2 l}\right)$$

Da cui:

$$h = l - \frac{g}{\omega^2} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l-h}}$$