Primo scritto- 18 Gennaio 2022

Esercizio 1

Quattro protoni sono disposti ai vertici di un quadrato di lato $d = 10^{-8}$m, come mostrato in figura 1. Un elettrone viene posto sull'asse $\hat{x}$ perpendicolare al piano del quadrato e passante per il suo centro O. Calcolare:

- Il valore del potenziale elettrico generato dai quattro protoni su tutto l'asse $\hat{x}$, in funzione della distanza dal centro del quadrato (**4 punti**).
- La forza $\vec{F}_e(x)$ agente sull'elettrone in funzione della sua coordinata x sull'asse $\hat{x}$, prendendo come origine dell'asse il centro O del quadrato (**4 punti**).

Dimostrare che per $|x| \ll d$, la forza agente sull'elettrone vale approssimativamente

$$\vec{F}_e(x) = -kx\hat{x} \ ,$$

e determinare il valore della costante k (**3 punti**).

Carica elettrica del protone: $e_p = 1.602 \times 10^{-19} C$.

Costante dielettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

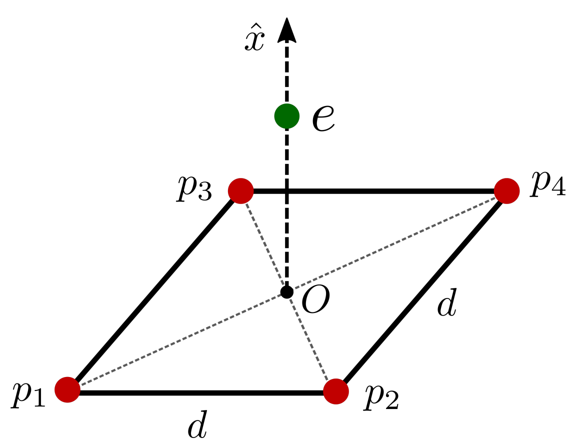

Figura 1

Esercizio 2

Una lamina sottile, conduttrice ed infinita, è percorsa da una densità lineare di corrente $\vec{J}_\ell$ di modulo $|\vec{J}_\ell| = 2\,\mathrm{A\,m^{-1}}$. Ad una distanza $d = 4\,\mathrm{m}$ dal piano della lamina, è presente un filo conduttore infinito, parallelo alla lamina, in cui scorre una corrente $i_f = 4\,\mathrm{A}$ nella stessa direzione e verso di $\vec{J}_l$, come mostrato in figura 2. Calcolare

- Il campo magnetico $\vec{B}_\ell$ generato dalla lamina in tutto lo spazio (**3 punti**)
- La forza per unità di lunghezza agente sul filo conduttore (**3 punti**).
- Il campo magnetico totale $\vec{B}$ nel piano ortogonale alla lamina e passante per il filo conduttore, individuando in quali punti del piano il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo (**5 punti**).

Permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H\,m^{-1}}$.

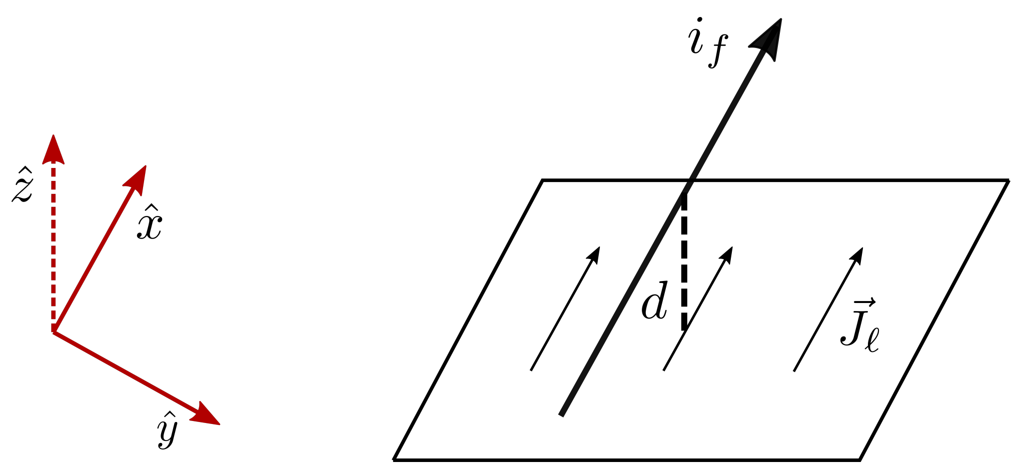

Figura 2

Esercizio 3

Una spira quadrata di lato $L = 20\,\mathrm{cm}$, massa m e resistenza $R = 0.1\,\Omega$ si trova su un piano $x - y$ dove è presente un campo magnetico $\vec{B} = kx\hat{z}$ con $k = 1\,\mathrm{T\,m^{-1}}$. Sulla spira agisce una forza esterna di modulo costante $\vec{F}_e = F_e\hat{x}$ con $F_e = 2\,\mathrm{N}$, come mostrato in figura 3.

- Calcolare la forza elettromotrice $\mathcal{E}(t)$ indotta nella spira, in funzione della sua velocità $\vec{v}(t) = v(t)\hat{x}$ ed indicare il verso della corrente indotta $i(t)$ (**4 punti**).
- Determinare l'accelerazione $a(t) \equiv dv(t)/dt$ della spira lungo $\hat{x}$ in funzione della sua velocità $v(t)$ (**3 punti**).
- Calcolare il valore limite v^* della velocità della spira, ed il valore limite i^* della corrente indotta (**4 punti**).

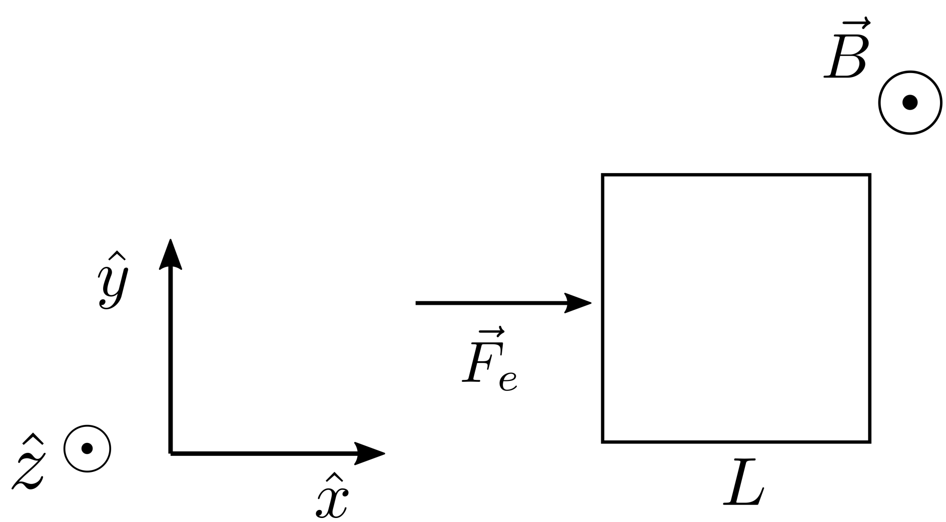

Figura 3

Soluzione Esercizio 1

Il potenziale elettrico sull'asse $\hat{x}$ è dato dalla somma dei potenziali elettrici generati dai quattro protoni. Detta x la coordinata (relativa ad O) di un punto sull'asse $\hat{x}$, si ha:

$$V(x) = \frac{e_p}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i}\ , \tag{1}$$

dove r_i è la distanza tra la posizione del protone i-esimo e il punto in cui valutiamo il potenziale. Questa è data da:

$$r_i = \sqrt{x^2 + d^2/2}\ , \qquad \text{per ogni i} \tag{2}$$

per cui

$$V(x) = \frac{e_p}{\pi\epsilon_0\sqrt{x^2 + d^2/2}}\ . \tag{3}$$

Per simmetria, la forza agente sull'elettrone (che si trova sull'asse $\hat{x}$), sarà diretta anch'essa lungo $\hat{x}$, e la si può calcolare utilizzando

$$\begin{aligned}\vec{F}(x) &= -e_e\frac{\partial V(x)}{\partial x}\hat{x} = e_p\frac{\partial V(x)}{\partial x}\hat{x}\\ &= -\frac{e_p^2}{\pi\epsilon_0}\cdot\frac{x}{(x^2 + d^2/2)^{3/2}}\hat{x}\ .\end{aligned} \tag{4}$$

Per $|x| \ll d$, possiamo approssimare il denominatore con:

$$(x^2 + d^2/2)^{3/2} \simeq \frac{d^3}{2\sqrt{2}}\ , \tag{5}$$

ed in questa approssimazione la forza risultante è:

$$\vec{F}(x) \simeq -\frac{2\sqrt{2}e_p^2}{\pi\epsilon_0}\cdot\frac{x}{d^3}\hat{x}\ . \tag{6}$$

pertanto

$$k = \frac{2\sqrt{2}e_p^2}{\pi\epsilon_0 d^3} \sim 2.61\times 10^{-3}\,\mathrm{N\,m^{-1}}\ . \tag{7}$$

Soluzione Esercizio 2

Per simmetria la direzione del campo magnetico $\vec{B}_\ell$ giace nel piano della lastra ed è ortogonale a $\vec{J}_\ell$. Con riferimento al sistema di assi cartesiani indicato nella figura del problema, il campo magnetico è diretto lungo $+\hat{y}$ per $z > 0$ e lungo $-\hat{y}$ per $z < 0$. Inoltre, sempre per considerazioni di simmetria, il suo modulo non può dipendere da x o y. Per calcolare il suo modulo ad una distanza z_1 dal piano della lastra, applichiamo il teorema di Ampere prendendo un percorso chiuso rettangolare nel piano $y-z$. Siano $(0,z_1)$, (h,z_1) , $(h,-z_1)$, $(0,-z_1)$ le coordinate dei vertici del rettangolo in questo piano. Si ha:

$$\int_C \vec{B}_\ell \cdot d\vec{\ell} = 2|\vec{B}_\ell(z_1)|h = \mu_0 i_{conc.} = \mu_0|J_\ell|h \implies |\vec{B}_\ell(z_1)| = \mu_0\frac{|\vec{J}_\ell|}{2} \tag{8}$$

Pertanto la lamina sottile genera un campo magnetico di modulo costante, e nell'attraversare la lamina il campo magnetico ha una discontinuità. Il filo conduttore infinito percorso da corrente i_f si trova nel semispazio $z>0$. La direzione in cui scorre la corrente i_f è inoltre paralella a $\vec{J}_\ell$. Pertanto la forza per unità di lunghezza agente sul filo è data da:

$$d\vec{F}/d\ell = -i_f|\vec{B}_\ell|\hat{z} = -\mu_0\frac{i_f|\vec{J}_\ell|}{2}\hat{z} \ , \tag{9}$$

ed il suo modulo vale quindi $|d\vec{F}/d\ell| \simeq 5.03\times10^{-6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$. Il campo magnetico totale $\vec{B}$ è dato dalla sovrapposizione tra il campo magnetico $\vec{B}_\ell$ generato dalla lastra e quello generato dal filo conduttore ($\vec{B}_f$). Il problema chiede di calcolare il campo totale soltanto nel piano ortogonale alla lastra e passante per il filo conduttore. Il modulo del campo magnetico $\vec{B}_f$ in un punto a distanza r dall'asse del filo conduttore vale, come noto,

$$|\vec{B}_f(r)| = \frac{\mu_0 i_f}{2\pi r} \ . \tag{10}$$

Inoltre, nel piano ortogonale alla lastra e passante per il filo, si ha che $\vec{B}_f$ è diretto come $+\hat{y}$ per $z>d$, e come $-\hat{y}$ per $z<d$. Pertanto i campi magnetici $\vec{B}_\ell$ e $\vec{B}_f$ sono discordi per $0<z<d$ e concordi altrimenti. Si ha quindi:

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \mu_0\left(\frac{|\vec{J}_\ell|}{2} + \frac{i_f}{2\pi(z-d)}\right)\hat{y} \,, & z>d \\ \mu_0\left(\frac{|\vec{J}_\ell|}{2} - \frac{i_f}{2\pi(d-z)}\right)\hat{y} \,, & 0<z<d \\ -\mu_0\left(\frac{|\vec{J}_\ell|}{2} + \frac{i_f}{2\pi(d-z)}\right)\hat{y} \,, & z<0 \end{cases} \tag{11}$$

Il campo magnetico totale può quindi annullarsi soltanto nella regione $0<z<d$, dove $\vec{B}_\ell$ e $\vec{B}_f$ sono discordi. La coordinata z per cui $\vec{B}$ si annulla è data da:

$$|\vec{J}_\ell| = \frac{i_f}{\pi(d-z)} \implies z = d - \frac{i_f}{\pi|\vec{J}_\ell|} \sim 3.36\,\mathrm{m} \ . \tag{12}$$

Soluzione Esercizio 3

Indichiamo con $x(t)$ la posizione al tempo t del centro della spira O lungo l'asse $\hat{x}$. Il flusso del campo magnetico concatenato alla spira è dato da:

$$\phi_B(t) = L \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B\left(x(t) + \ell\right)\, d\ell = L \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(kx(t) + k\ell\right)\, d\ell = L^2 k\, x(t)\ . \tag{13}$$

Si ha quindi che

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -L^2 k v(t)\ . \tag{14}$$

Dal momento che la spira ha una resistenza complessiva R=0.1 Ω, la corrente indotta dipende dalla velocità tramite:

$$i(t) = -\frac{L^2 k}{R} v(t)\ . \tag{15}$$

Se $v(t) > 0$, allora $i(t) < 0$ e la corrente scorre in senso orario. La forza totale agente sulla spira è data dalla somma tra la la forza esterna $\vec{F}_e$ e la forza di Lorentz. I due lati della spira paralelli a $\hat{x}$ sono sottoposti ad una forza di Lorentz uguale in modulo e opposta in verso, pertanto la somma dei due contributi è nulla. I due lati della spira paralleli a $\hat{y}$ risentono sempre di una forza di Lorentz opposta in verso, ma di intensità diversa, dal momento che il lato più a sinistra è sottoposto ad un campo magnetico di minore intensità. Indichiamo di nuovo con $x(t)$ la posizione al tempo t del centro della spira lungo l'asse $\hat{x}$. Le forze di Lorentz $\vec{F}_L^1$ e $\vec{F}_L^2$, agenti rispettivamente sul lato destro e sinistro della spira, sono date da:

$$\vec{F}_L^1 = Li(t)k\left(x(t) + \frac{L}{2}\right)\hat{x}, \qquad \vec{F}_L^2 = -Li(t)k\left(x(t) - \frac{L}{2}\right)\hat{x}\ . \tag{16}$$

La forza di Lorentz agente sulla spira è data dunque da:

$$\vec{F}_L = \vec{F}_L^1 + \vec{F}_L^2 = L^2 i(t) k\hat{x}\ , \tag{17}$$

e la forza totale agente sulla sbarretta è:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_L = F_e\hat{x} + L^2 i(t)k\hat{x}\ . \tag{18}$$

Utilizzando Eq. (15), l'accelerazione $a(t)$ della spira al tempo t è quindi data da:

$$a(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt} = \frac{F_e}{m} + \frac{L^2 k}{m} i(t) = \frac{F_e}{m} - \frac{L^4 k^2}{mR} v(t)\ . \tag{19}$$

La velocità limite si ottiene quando $a = 0$ e le due forze si bilanciano esattamente. Ponendo a zero il membro destro della precedente equazione si ha quindi:

$$v^* = \frac{RF_e}{L^4 k^2} = 125\,\mathrm{m\,s^{-1}} \implies |i^*| = \frac{F_e}{L^2 k} = 50\,\mathrm{A}\ . \tag{20}$$