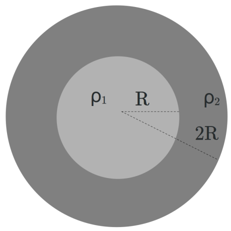
Fisica 2 - Scritto gennaio 2026

Esercizio 1

Una distribuzione sferica di carica elettrica ha densità uniforme $\rho_1 = 4 \cdot 10^{-7}$ C/m^3 per $r < R$ e $\rho_2 = -3 \cdot 10^{-7}$ C/m^3 per $R < r < 2R$ con $R = 0.2$ m.

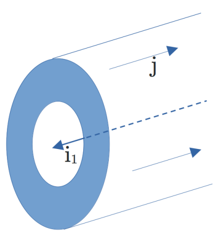
1. Calcolare la carica totale contenuta nella distribuzione. [**2 punti**]
2. Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ in tutto lo spazio e trovare per quali valori di r si ha $E = 0$. [**6 punti**]
3. Calcolare il lavoro necessario a portare una particella di carica $q = 1 \cdot 10^{-8}$ C da R al centro. [**3 punti**]



Esercizio 2

Un conduttore cilindrico indefinito, cavo, di raggio interno $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm è percorso da una densità di corrente $j = kr$ con $k = 30$ A/m^3 (r è la distanza dall'asse del cilindro). Lungo l'asse, corre un filo percorso da corrente $i_1 = 10$ A in verso opposto a j.

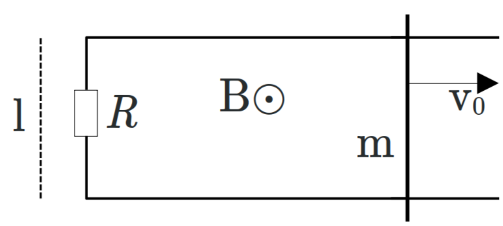
1. Determinare il campo magnetico in tutto lo spazio e calcolarne il valore per $r = 15$ cm. [**6 punti**]
2. Dire (giustificando la risposta) se il campo si annulla per qualche valore di r. [**3 punti**]
3. Dire (giustificando la risposta) se il cilindro esercita una forza magnetica sul filo e viceversa. [**2 punti**]



Esercizio 3

Due binari conduttori paralleli, separati da distanza $l = 0.50$ m, sono collegati a un estremo tramite una resistenza $R = 100\,\Omega$. Su di essi può scorrere una barra di massa $m = 0.4$ kg perpendicolare ai binari. Nel piano dei binari è presente un campo magnetico uniforme $B = 1.2$ T, perpendicolare al piano del circuito. All'istante $t = 0$ la barra ha una velocità iniziale v_0 lungo i binari.

1. Calcolare la velocità della barra dopo un tempo $t = 10$ s. [**6 punti**]
2. Calcolare l'energia dissipata per effetto Joule durante il processo. [**5 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1.

$$Q_{\rm tot} = \rho_1 \frac{4}{3}\pi R^3 + \rho_2 \frac{4}{3}\pi \left[(2R)^3 - R^3\right] = -5.66 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C} \tag{1}$$

2. Poiché vale la simmetria sferica, possiamo applicare il teorema di Gauss usando una superficie sferica di raggio r:

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{\rm int}(r)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q_{\rm int}(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{2}$$

Per $r < R$ occorre considerare ρ_1:

$$Q_{\rm int}(r) = \rho_1 \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{3}$$

$$\Rightarrow E_1(r) = \frac{\rho_1 r}{3\varepsilon_0} \tag{4}$$

Per $R < r < 2R$:

$$Q_{\rm int}(r) = Q_1 + \rho_2 \frac{4}{3}\pi (r^3 - R^3) = \frac{4\pi}{3}\left[\rho_1 R^3 + \rho_2 (r^3 - R^3)\right] \tag{5}$$

$$\Rightarrow E_2(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\left[\rho_2 r + (\rho_1 - \rho_2)\frac{R^3}{r^2}\right] \tag{6}$$

Infine per $r > 2R$:

$$E_3(r) = \frac{Q_{\rm tot}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{7}$$

Visti i risultati, il campo si annulla in $r = 0$ e all'interno del guscio $R < r < 2R$:

$$E(r_0) = 0 \Rightarrow 0 = \rho_2 r_0 + (\rho_1 - \rho_2)\frac{R^3}{r_0^2} \tag{8}$$

$$\Rightarrow r_0^3 = -\frac{(\rho_1 - \rho_2) R^3}{\rho_2} \tag{9}$$

da cui si ricava

$$r_0 = 0.26\ \mathrm{m} \tag{10}$$

3. La differenza di potenziale è

$$\Delta V = \int_0^R E_1(r) dr = \int_0^R \frac{\rho_1 r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho_1 R^2}{6\varepsilon_0} = 301\ \mathrm{V} \tag{11}$$

il lavoro quindi risulta

$$W = q\, \Delta V = 3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J} \tag{12}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Per simmetria cilindrica le linee di campo magnetico sono circolari e il modulo $B(r)$ è funzione del solo raggio. Si applica la legge di Ampère per le diverse regioni.

Per $0 < r < R_1$ non passa corrente nel cilindro, ma è incluso il filo sull'asse. La corrente concatenata vale $I_c = -i_1$ (dove il segno meno indica il verso opposto rispetto a j). Allora

$$B(r)\,2\pi r = \mu_0(-i_1) \tag{13}$$

$$\Rightarrow B(r) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}. \tag{14}$$

Nella regione $R_1 < r < R_2$, la corrente concatenata è la somma del contributo del filo e di quello del cilindro fino al raggio r: $I_c = -i_1 + i_{\mathrm{cil}}(r)$. La corrente del cilindro si ottiene integrando la densità:

$$i_{\mathrm{cil}}(r) = \int_{R_1}^{r} j(r')\,dS = \int_{R_1}^{r} kr'\,(2\pi r'\,dr') = \frac{2\pi k}{3}\left(r^3 - R_1^3\right). \tag{15}$$

Applicando ora Ampère:

$$B(r)\,2\pi r = \mu_0\left[-i_1 + \frac{2\pi k}{3}(r^3 - R_1^3)\right] \tag{16}$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[-i_1 + \frac{2\pi k}{3}(r^3 - R_1^3)\right]. \tag{17}$$

Infine, nella regione $r > R_2$ è concatenata tutta la corrente del cilindro più quella del filo. La corrente totale nel cilindro vale:

$$i_{\mathrm{cyl}}^{\mathrm{tot}} = \frac{2\pi k}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right). \tag{18}$$

Ampère fornisce:

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[-i_1 + \frac{2\pi k}{3}(R_2^3 - R_1^3)\right]. \tag{19}$$

Infine, per $r = 15$ cm

$$B(r = 15\ \mathrm{cm}) = -1.3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T} \tag{20}$$

2. Il campo magnetico potrebbe annullarsi solo nella regione $R_1 < r < R_2$, e in tal caso

$$-i_1 + \frac{2\pi k}{3}(r^3 - R_1^3) = 0. \tag{21}$$

Si ricava:

$$r^3 = R_1^3 + \frac{3 i_1}{2\pi k}. \tag{22}$$

Sostituendo i dati numerici si ottiene $r = 0.54$ m che non è però interno alla regione considerata, anzi risulta $r > R_2$. Quindi $B \neq 0$ dappertutto.

3. Il campo magnetico prodotto dal cilindro per $r < R_1$ è nullo, quindi non c'è alcuna forza sul filo. Vale anche il viceversa, come si può notare per il principio di azione e reazione oppure per la simmetria cilindrica (le forze magnetiche locali sono radiali e si cancellano a coppie sull'intero cilindro.).

Soluzione del terzo esercizio:

1. La barra in moto genera una f.e.m. che in modulo vale

$$\mathcal{E} = Blv(t) \tag{23}$$

La corrente nel circuito è quindi:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Bl}{R}\, v(t) \tag{24}$$

La barra subisce una forza magnetica:

$$F = IlB = \frac{B^2 l^2}{R}\, v(t) \tag{25}$$

Applicando la seconda legge di Newton:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R}\, v(t) \tag{26}$$

L'equazione differenziale ha soluzione:

$$v(t) = v_0\, e^{-B^2 l^2 t/mR} \tag{27}$$

Si ricava quindi

$$v(t = 10\ \mathrm{s}) = 0.91 v_0 \tag{28}$$

2. La potenza istantanea dissipata nella resistenza è:

$$P(t) = I(t)^2\, R = \frac{B^2 l^2}{R} v(t)^2 \tag{29}$$

La barra si arresta per $t \to \infty$. L'energia totale dissipata nella resistenza è quindi:

$$W = \int_0^\infty P(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{B^2 l^2}{R} v_0^2 e^{-2t/\tau}\, dt \tag{30}$$

che porta a

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{31}$$

cioè l'energia cinetica iniziale della barra.