Fisica 2 - Primo esonero novembre 2025

Esercizio 1

Una carica $q = 5 \times 10^{-11}$ C è distribuita in una sfera di raggio $R = 11$ cm con una densità $\rho(r) = A(R - r)$ dove A è una costante e r la distanza dal centro.

1. Calcolare il valore della costante A. [**3 punti**]
2. Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio e calcolare il suo valore numerico sulla superficie della sfera. [**4 punti**]
3. Calcolare il potenziale sulla superficie della sfera (ponendo $V_\infty = 0$) e nel suo centro. [**4 punti**]
4. La sfera viene racchiusa in un guscio metallico, sferico e concentrico, di raggio $2R$ e spessore trascurabile, collegato a terra. Come cambia il campo elettrico nello spazio? [**3 punti**]

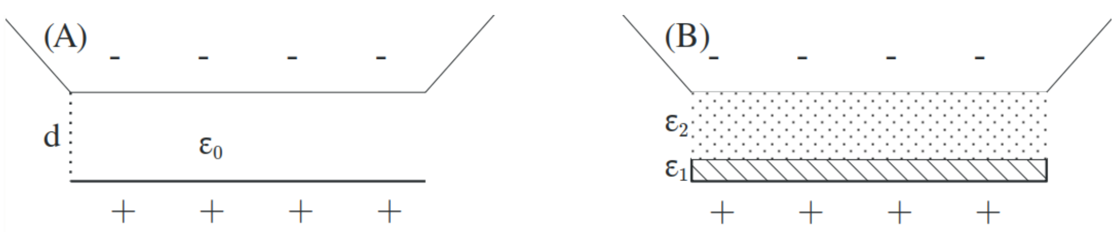
Esercizio 2

Una certa stella emette brevi impulsi di energia a intervalli regolari. Si assume che una zona della superficie stellare e l'atmosfera soprastante formino un condensatore piano (Fig. A), di area $A = \pi R_p^2$ e distanza tra le armature d, che si scarica attraverso una resistenza $\mathcal{R}$ (non disegnata). Il campo elettrico massimo tra le armature è pari a $E_0 = 5 \times 10^6$ V/m. Si assumono inoltre i seguenti valori numerici: $R_p = 500$ m, $d = 100$ m, $\mathcal{R} = 10^5\ \Omega$.

1. Calcolare la capacità C del condensatore, la massima differenza di potenziale V_0 e la massima quantità di carica immagazzinata Q_0. [**3 punti**]
2. Scrivere le espressioni di $V(t)$ e $I(t)$ durante la scarica. Calcolare la costante di tempo del circuito RC e la potenza massima dissipata. [**4 punti**]
3. Determinare in quanto tempo viene dissipato il 99% dell'energia immagazzinata. [**4 punti**]

Si ipotizza ora che lo spazio tra la superficie stellare e l'atmosfera sia costituito da due strati differenti (Fig. B): uno inferiore di spessore $d_1 = 10$ m e permittività relativa $\varepsilon_1 = 10$, e uno strato superiore di spessore $d_2 = 90$ m e permittività relativa $\varepsilon_2 = 1$. La carica massima sia ancora Q_0, come calcolato al punto 1.

4. Calcolare la capacità equivalente e la nuova differenza di potenziale V_0' tra le armature. [**4 punti**]
5. Dire in quale dei due strati si concentra la maggior parte dell'energia (non è necessario svolgere il calcolo esplicito). [**3 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. La carica totale è pari all'integrale di volume

$$q = \int \rho \, dv = \int_0^R A(R-r) 4\pi r^2 \, dr = \frac{\pi A R^4}{3} \tag{1}$$

da cui

$$A = \frac{3q}{\pi R^4} = 3.26 \times 10^{-7} \ \mathrm{C/m^4} \tag{2}$$

2. Data la simmetria sferica, il campo elettrico è radiale e si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica. Iniziamo con il campo all'interno della sfera, a distanza $r < R$ dal centro.

$$\Phi(\vec{E}) = E \, 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r A(R-r') 4\pi r'^2 \, dr' \tag{3}$$

risolvendo l'integrale si ottiene

$$E \, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(A 4\pi R \frac{r^3}{3} - A 4\pi \frac{r^4}{4} \right) \tag{4}$$

e infine

$$E(r \leq R) = \frac{A}{\varepsilon_0} \left(\frac{Rr}{3} - \frac{r^2}{4} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2) \tag{5}$$

All'esterno della sfera, sempre applicando il teorema di Gauss per una superficie di raggio $r > R$:

$$E(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{6}$$

sulla superficie della sfera si ricava quindi

$$E(r = R) = 37.1 \ \mathrm{V/m} \tag{7}$$

3. Il potenziale si calcola dall'integrale del campo elettrico:

$$V_R - V_\infty = -\int_\infty^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \tag{8}$$

si ricava pertanto

$$V_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 4.1 \ \mathrm{V} \tag{9}$$

Invece per il potenziale al centro della sfera si può scrivere:

$$V_0 - V_R = -\int_R^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_R^0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2) \, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{2r^2}{R^3} - \frac{r^3}{R^4} \right]_R^0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{10}$$

Allora inserendo la 9 si ricava:

$$V_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R} = 8.2 \ \mathrm{V} \tag{11}$$

4. Sulla superficie interna del guscio metallico viene indotta una carica $-q$; la carica $+q$ sulla superficie esterna viene dispersa a terra. Il campo elettrico fino a $r < 2R$ rimane lo stesso, poi si annulla per il teorema di Gauss ($q_{int} = 0$).

Soluzione del secondo esercizio:

1. La capacità del condensatore piano è:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{\pi R_p^2}{d} = 6.94 \times 10^{-8} \text{ F} \tag{12}$$

Il potenziale massimo vale:

$$V_0 = E_0\, d = 5 \times 10^8 \text{ V} \tag{13}$$

La carica massima immagazzinata è:

$$Q_0 = CV_0 = 34.7 \text{ C} \tag{14}$$

2. Le leggi temporali di scarica sono le seguenti:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau} \tag{15}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \tag{16}$$

con $\tau = RC = 6.9 \times 10^{-3}$ s.

La corrente iniziale e la potenza massima risultano:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = 5 \times 10^3 \text{ A} \tag{17}$$

$$P_{\max} = V_0 I_0 = 2.5 \times 10^{12} \text{ W} \tag{18}$$

3. L'energia dissipata è in generale

$$U(t) = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} C V_0^2 e^{-2t/\tau} = U_0 e^{-2t/\tau} \tag{19}$$

Il 99% dell'energia è dissipato quando $U(t) = 0.01\, U_0$, cioè:

$$e^{-2t/\tau} = 0.01 \Rightarrow t = \frac{\tau}{2} \ln(100) = 2.3\tau = 15.9 \text{ ms.} \tag{20}$$

4. La capacità dei due strati vale:

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{d_1} = 6.95 \times 10^{-6} \text{ F}, \tag{21}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{A}{d_2} = 7.72 \times 10^{-8} \text{ F.} \tag{22}$$

La capacità equivalente (serie) vale:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_{\text{eq}} = 7.64 \times 10^{-8} \text{ F.} \tag{23}$$

La nuova differenza di potenziale risulta quindi:

$$V_0' = \frac{Q_0}{C_{\text{eq}}} = 4.54 \times 10^8 \text{ V.} \tag{24}$$

5. Le energie immagazzinate nei singoli strati sono:

$$U_1 = \frac{Q_0^2}{2C_1}, \; U_2 = \frac{Q_0^2}{2C_2} \tag{25}$$

ed essendo $C_1 > C_2$ si ha $U_2 > U_1$.