Scritto - 14 Giugno 2021

Esercizio 1

Un piano inclinato di un angolo $\theta = 45°$ è posto su un blocco rettangolare di altezza $H = 2\,\mathrm{m}$. Sul piano inclinato si trova un punto materiale di massa $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$, inizialmente in quiete nella posizione indicata in figura 1, dove $d = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$. Un secondo punto materiale di massa $m_2 = 2.5\,\mathrm{kg}$ è invece posto sul bordo del blocco rettangolare. Il piano inclinato ed il piano del blocco sono da considerarsi privi di attrito. Calcolare:

- La velocità v_1 con cui il punto materiale di massa m_1 urta il punto materiale di massa m_2. (**3 punti**).
- La velocità v_2 del punto materiale di massa m_2 subito dopo l'urto, nell'ipotesi di urto elastico. (**3 punti**)
- La distanza orizzontale L che il punto materiale di massa m_2 ha percorso nell'istante in cui tocca terra. (**4 punti**)

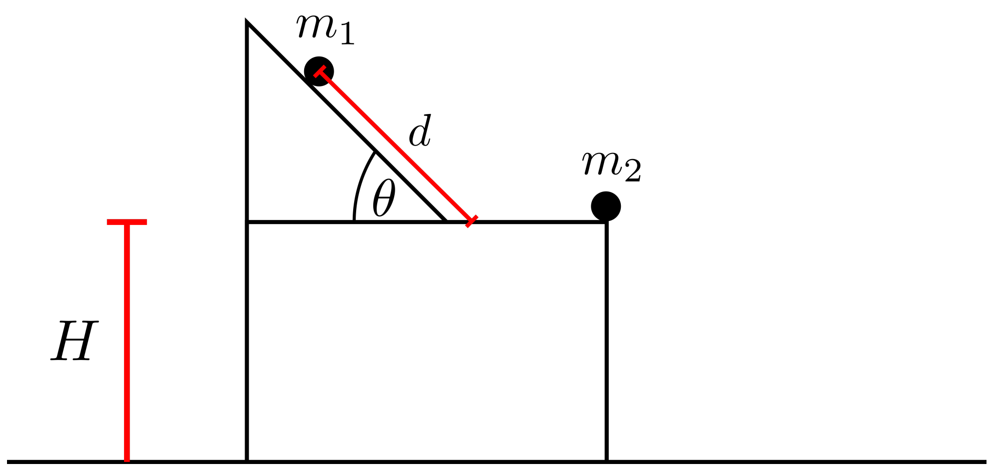

figura 1

Esercizio 2

Un disco omogeneo di massa $m = 5\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 1.5\,\mathrm{m}$ rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto al piano orizzontale. Al disco è applicato un momento esterno di modulo $M = 60\,\mathrm{N\,m}$ e direzione perpendicolare al foglio e verso entrante, che gli permette di risalire lungo il piano inclinato (figura 2). Determinare:

- L'accelerazione a del centro di massa del disco. (**5 punti**)
- Il tempo necessario a percorrere una distanza $d = 20\,\mathrm{m}$ lungo il piano inclinato, supponendo che il disco sia inizialmente in quiete (**2 punti**).
- Il valore minimo del coefficiente di attrito statico tra disco e piano inclinato affinchè il moto di rotolamento puro precedente sia consentito. (**4 punti**).

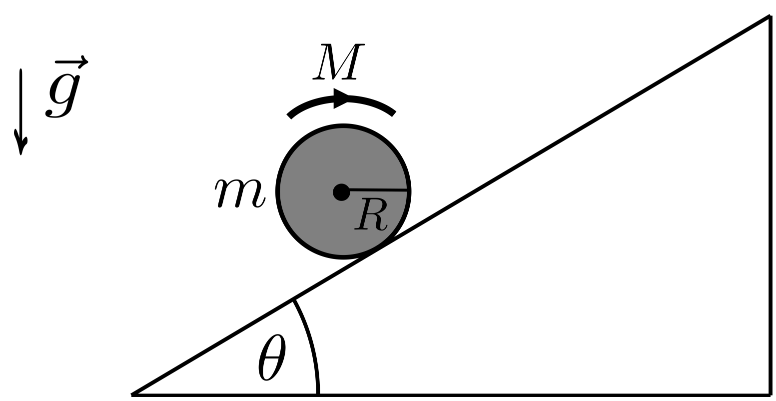

figura 2

Esercizio 3

Due moli di gas perfetto biatomico compiono il ciclo termodinamico reversibile mostrato in figura 3. Le trasformazioni $B-C$ e $D-A$ sono adiabatiche, mentre le transformazioni $A-B$ e $C-D$ avvengono a pressione costante. Sapendo che $T_A = 400\,\mathrm{K}$, $p_D = p_A/2$ e $V_B = 3V_A$, calcolare:

- I calori Q_{AB} e Q_{CD} scambiati nelle trasformazioni isobare $A-B$ e $C-D$. (**5 punti**)
- Il rendimento η del ciclo. (**3 punti**)
- Le variazioni di entropia ΔS_{AB} e ΔS_{CD} del gas nelle trasformazioni isobare $A-B$ e $C-D$. (**4 punti**)

($R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$).

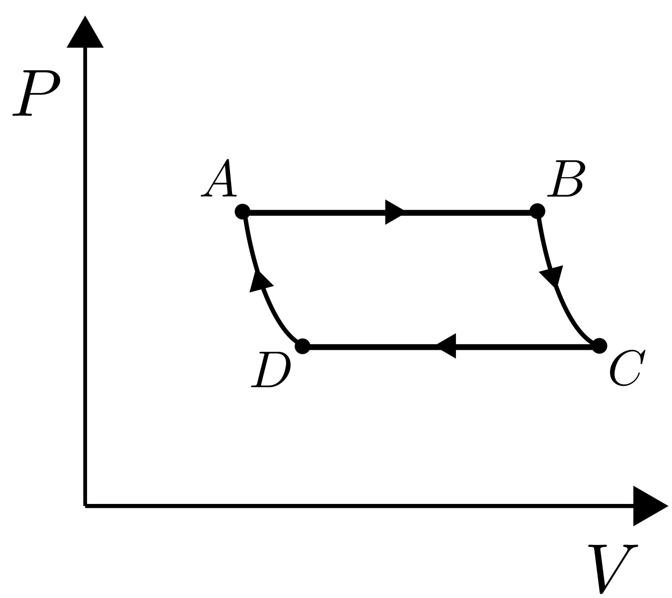

figura 3

Soluzione Esercizio 1

La velocità del punto materiale di massa m_1 quando si trova sul piano del blocco rettangolare può essere calcolata utilizzando la conservazione dell'energia (cinetica più potenziale gravitazione). Si ha:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = m_1 g h \implies v_1 = \sqrt{2gh} \sim 4.43\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{1}$$

dove $h = d\sin\theta$. Essendo il punto materiale di massa m_2 inizialmente in quiete, dal momento che l'urto è elastico, la sua velocità v_2 subito dopo l'urto è data da

$$v_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \sim 5.45\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{2}$$

Il punto materiale di massa m_2 seguirà dunque una traiettoria parabolica data da:

$$\begin{cases} x(t) = v_2 \cdot t \\ y(t) = \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{3}$$

avendo orientato l'asse verticale y verso il basso e avendo scelto l'origine degli assi coincidente con la posizione iniziale della massa m_2. L'istante $\tilde{t}$ di caduta lo si trova da:

$$y(\tilde{t}) = \frac{1}{2} g \cdot \tilde{t}^2 = H \implies \tilde{t} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \ . \tag{4}$$

Pertanto, la distanza orizzontale L che la massa m_2 ha percorso nell'istante in cui tocca terra è data da:

$$L = x(\tilde{t}) = v_2 \cdot \tilde{t} = v_2 \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{4m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{H d \sin\theta} \sim 3.48\,\mathrm{m} \ . \tag{5}$$

Soluzione Esercizio 2

Indichiamo con a l'accelerazione del centro di massa del sistema, orientata concordemente al moto. Si ha:

$$m \cdot a = f_s - mg \sin\theta \ , \tag{6}$$

dove con f_s abbiamo indicato, essendo il moto di rotolamento puro, la forza di attrito statico. Quest'ultima si può ricavare dalla seconda equazione cardinale. Indicando con L il modulo del momento angolare del disco, calcolato scegliendo come polo il suo centro di massa e con α ed ω l'accelerazione e velocità angolare del disco, si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(I\omega) = I\frac{\partial \omega}{\partial t} = I\alpha = \frac{I}{R}a = M - f_s R \ , \tag{7}$$

dove $I = \frac{1}{2}mR^2$ è il momento d'inerzia del disco, ed abbiamo utilizzato la condizione di rotolamento puro $\alpha R = a$. Dalla precedente equazione otteniamo:

$$\frac{1}{2}ma = \frac{M}{R} - f_s \ . \tag{8}$$

Sostituendo quanto appena trovato in Eq. [6], si ha

$$ma = -\frac{1}{2}ma + \frac{M}{R} - mg\sin\theta \implies a = \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{M}{mR} - g\sin\theta\right] \sim 2.07\,\mathrm{m/s^2} \ , \tag{9}$$

mentre la forza di attrito statico vale:

$$f_s = \frac{M}{R} - \frac{1}{2}ma \sim 34.83\,\mathrm{N}. \tag{10}$$

Dal momento che il disco è inizialmente in quiete ed ha una accelerazione costante $a \sim 2.07\,\mathrm{m/s^2}$, il tempo t necessario a percorrere una distanza $d = 20\,\mathrm{m}$ lungo il piano inclinato è dato da

$$\frac{1}{2}at^2 = d \implies t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \sim 4.4\,\mathrm{s} \ . \tag{11}$$

Il coefficiente d'attrito statico minimo $\mu_s^{\mathrm{min.}}$ necessario affinchè il moto di rotolamento puro precedente sia possibile si trova da

$$\mu_s^{min.}|\vec{N}| = \mu_s^{min.} mg\cos\theta = 34.83\,\mathrm{N} \implies \mu_s^{min.} \sim 0.82 \ . \tag{12}$$

Soluzione Esercizio 3

Essendo $p_A = p_B$ e $V_B = 3V_A$, si ha che la temperatura in B è data da:

$$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = \frac{3 p_A V_A}{nR} = 3T_A \sim 1200\,\mathrm{K} \ . \tag{13}$$

Il calore Q_{AB} scambiato dal gas nella trasformazione $A - B$ si ottiene dunque da

$$Q_{AB} = nc_p \cdot (T_B - T_A) = nc_p 2T_A \sim 46\,558\,\mathrm{J} \ , \tag{14}$$

dove abbiamo usato che per un gas perfetto biatomico $c_p = \frac{7}{2}R$. Come atteso, questo calore viene assorbito dal gas. Per calcolare il calore Q_{CD} scambiato nella trasformazione $C - D$, dobbiamo calcolare la temperatura del gas nei punti C e D. Per farlo utilizziamo il fatto che in una trasformazione adiabatica reversibile si ha:

$$TV^{\gamma-1} = const. \implies Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const. \ , \tag{15}$$

e per un gas perfetto biatomico $\gamma = c_p/c_v = \frac{7}{5} \implies \frac{1-\gamma}{\gamma} = -2/7$. Applicando la formula precedente alla adiabatica $D - A$, si ha:

$$p_A^{-\frac{2}{7}} T_A = T_D p_D^{-\frac{2}{7}} \implies T_D = \frac{T_A}{2^{2/7}} \sim 328\,\mathrm{K} \ . \tag{16}$$

Analogamente la temperatura nel punto C è data da:

$$T_C = \frac{T_B}{2^{2/7}} = 3 \cdot \frac{T_A}{2^{2/7}} = 3T_D \sim 984\,\mathrm{K} \ . \tag{17}$$

Il calore Q_{CD} è allora dato da:

$$Q_{CD} = nc_p \cdot (T_D - T_C) = -nc_p 2T_D \sim -38\,194\,\mathrm{J} \ , \tag{18}$$

ed il gas cede calore in questa trasformazione. Dal momento che nelle trasformazioni adiabatiche il calore scambiato è nullo, il calore complessivamente assorbito nel ciclo è $Q_A = Q_{AB}$, mentre il calore ceduto è $Q_C = Q_{CD}$. Il rendimento del ciclo è pertanto dato da:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} \sim 0.18 \ . \tag{19}$$

La variazione di entropia del gas ΔS_{AB} nella trasformazione isobara $A - B$, si ottiene da:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = nc_p \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = nc_p \log \frac{T_B}{T_A} = nc_p \log 3 \sim 63.94\,\mathrm{J\,K^{-1}} \ , \tag{20}$$

mentre $\Delta S_{CD} = -\Delta S_{AB} = -nc_p \log 3 = -63.94\,\mathrm{J\,K^{-1}}$.