Primo esonero - 23 Aprile 2021

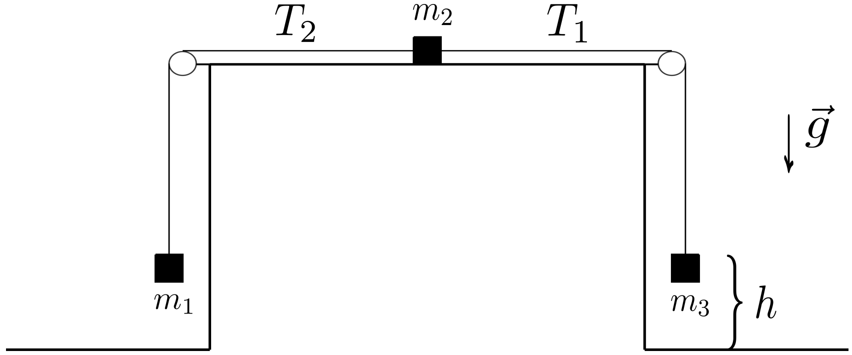
Esercizio 1

Si consideri il sistema rappresentato in figura, in cui $m_1 = m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ e $m_3 = 4\,\mathrm{kg}$. Il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il blocco di massa m_2 ed il piano su cui si muove è dato da $\mu_d = 0.2$. I due fili che collegano i tre blocchi sono da considerarsi inestensibili e di massa trascurabile. Si trascuri inoltre ogni forma di attrito tra filo e puleggia. I tre blocchi sono inizialmente in quiete ed il sistema è lasciato libero di muoversi al tempo $t = 0$ dalla posizione indicata in figura, dove $h = 1\,\mathrm{m}$.

- Disegnare le forze agenti sui tre blocchi. (**3 punti**)
- Determinare l'accelerazione a del sistema. (**5 punti**)
- Determinare la tensione T_2 nel filo che collega i blocchi di massa m_1 ed m_2 e la tensione T_1 nel filo che collega i blocchi di massa m_2 ed m_3. (**5 punti**)

Ad un certo tempo $\tilde{t}$ il blocco di massa m_3 tocca terra.

- Quanto vale il modulo della velocità dei blocchi di massa m_1 ed m_2 al tempo $\tilde{t}$? (**2 punti**)



Esercizio 2

Con riferimento alla figura (a), si considerino i due urti elastici consecutivi (ed unidimensionali) tra tre punti materiali di masse $m_0 = m$, $m_1 = m/2$ ed $m_2 = m/4$. I punti materiali di massa m_1 ed m_2 sono inizialmente fermi, mentre il punto materiale di massa m_0 ha una velocità iniziale v_0 diretta come in figura. Il punto materiale di massa m_0 urterà dunque elasticamente il punto materiale di massa m_1 che a sua volta urterà elasticamente il punto materiale di massa m_2. Si trascuri inoltre ogni forma di attrito tra il piano orizzontale ed i punti materiali.

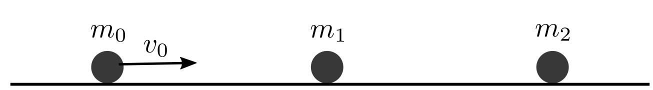
- Calcolare la velocità finale v_2 del punto materiale di massa $m_2 = m/4$ in funzione di v_0. (**7 punti**).

Si introduca ora un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.1$ tra il piano orizzontale ed i punti materiali. Si assuma che i tre punti materiali siano inizialmente equidistanziati come mostrato in figura (b), con $d = 1\,\mathrm{m}$. La velocità iniziale v_0 del punto materiale di massa m_0 è $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Gli urti avvengono in tempo molto breve, pertanto lo spostamento dei punti materiali durante l'urto è trascurabile.

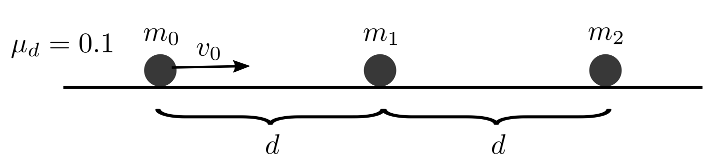
- Quanto vale la velocità v_2 del punto materiale di massa $m_2 = m/4$ immediatamente dopo l'urto? (**8 punti**)

Torniamo ora al caso del primo punto (in cui l'attrito è assente), ma assumiamo che il secondo urto (quello tra m_1 ed m_2) sia totalmente anelastico.

- Quanto vale la velocità finale v_2 dei punti materiali di massa m_1 ed m_2 in funzione di v_0? (**3 punti**)



(a)



(b)

Soluzione Esercizio 1

Dal momento che $m_3 > m_1$ il blocco di massa m_3 scende e il blocco di massa m_1 sale. Indichiamo con a l'accelerazione del sistema e con T_1 e T_2 le tensioni nei due fili. Si ha:

$$\begin{cases} m_3 \cdot a &= m_3 \cdot g - T_1 \\ m_2 \cdot a &= T_1 - T_2 - F_d \\ m_1 \cdot a &= T_2 - m_1 \cdot g \end{cases} \tag{1}$$

dove $F_d = \mu_d N = \mu_d m_2 g$ è il modulo della forza di attrito dinamico. Per ricavare l'accelerazione a del sistema è sufficiente sommare membro a membro le tre equazioni. Si ottiene:

$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot a = (m_3 - m_1 - \mu_d m_2) \cdot g \ , \tag{2}$$

da cui

$$a = \frac{m_3 - m_1 - \mu_d m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g \ . \tag{3}$$

Utilizzando i dati forniti dal problema si ricava $a \sim 1.96\,\mathrm{m/s^2}$.
Dalla prima equazione del sistema ricaviamo immediatamente

$$T_1 = m_3 \cdot (g - a) \sim 31.36 \text{ N} \ , \tag{4}$$

mentre dalla terza equazione del sistema si ha

$$T_2 = m_1 \cdot (g + a) \sim 23.52 \text{ N} \ . \tag{5}$$

Il blocco di massa m_3 raggiunge il suolo ad un tempo $\tilde{t}$ che si ottiene da

$$h = \frac{1}{2} a \tilde{t}^2 \implies \tilde{t} = \sqrt{\frac{2h}{a}} \sim 1.01\,\mathrm{s} \ . \tag{6}$$

Il modulo v della velocità dei blocchi di massa m_1 ed m_2 al tempo $\tilde{t}$ è pertanto dato da

$$v(\tilde{t}) = a\tilde{t} = \sqrt{2ha} \sim 1.98\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{7}$$

Soluzione Esercizio 2

Indichiamo con v_1 la velocità del punto materiale di massa $m_1 = m/2$ dopo il primo urto. Come visto a lezione ed esercitazione, dal momento che l'urto è elastico e che m_1 è inizialmente fermo, si ha

$$v_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} v_0 = \frac{4}{3} v_0. \tag{8}$$

Applicando la stessa formula all'urto elastico tra m_1 ed m_2 si ha

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{4}{3} v_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_0 \ . \tag{9}$$

Assumiamo ora $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e che il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra piano orizzontale e punti materiali sia $\mu_d = 0.1$. La velocità, che indichiamo con $\tilde{v}_0$ con cui il punto materiale m_0 urta il punto materiale m_1 sarà data da

$$\tilde{v}_0 = v_0 - \mu_d g \Delta t \ , \tag{10}$$

dove Δt è l'intervallo di tempo che impiega a percorrere la distanza $d = 1m$ e che si ottiene da

$$d = v_0 \Delta t - \frac{1}{2} \mu_d g \Delta t^2 \implies \Delta_t = \frac{1}{\mu_d g} \cdot (v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g d}), \tag{11}$$

e la soluzione da prendere è quella con segno meno. Si ha pertanto

$$\tilde{v}_0 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g d} \sim 9.90\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{12}$$

Dopo il primo urto elastico tra m_0 ed m_1, la velocità del punto materiale m_1 immediatamente dopo l'urto è data da

$$v_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} \tilde{v}_0 = \frac{4}{3} \tilde{v}_0 \sim 13.20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{13}$$

Indicando con $\tilde{v}_1$ la velocità del punto materiale di massa m_1 subito prima del secondo urto, si ha di nuovo

$$\tilde{v}_1 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu_d g d} \sim 13.13\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ , \tag{14}$$

e la velocità finale del punto materiale m_2 subito dopo l'urto sarà dunque data da

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \tilde{v}_1 = \frac{4}{3} \tilde{v}_1 \sim 17.50\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{15}$$

Torniamo ora al caso senza attrito. La velocità v_2 dei punti materiali di massa m_1 ed m_2, nel caso in cui il secondo urto sia totalmente anelastico, si ottiene da

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \ , \tag{16}$$

con $v_1 = \frac{4}{3} v_0$. Pertanto

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot v_0 \ . \tag{17}$$