Fisica 1 - Primo Esonero, 18 aprile 2023

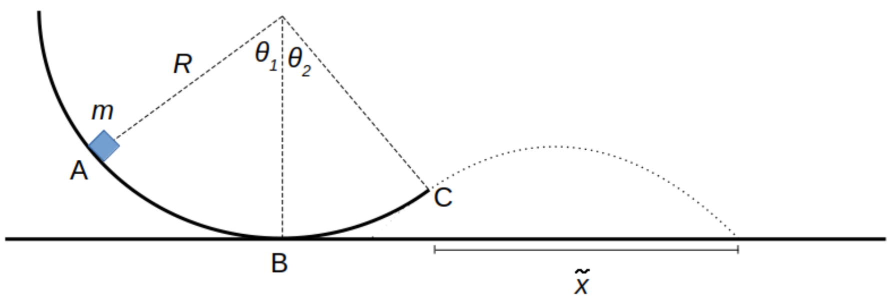
Esercizio 1

Un blocchetto di massa $m = 0.5$ kg scivola lungo una guida a forma di arco di circonferenza di raggio $R = 1$ m, partendo da un punto A come in figura.

1. Se la guida è scabra e il coefficiente di attrito statico vale $\mu = 0.2$, trovare il massimo valore dell'angolo θ_1 per cui blocchetto resta fermo. [**4 punti**]

Supponiamo ora che il blocchetto sia libero di muoversi senza attrito lungo la guida, partendo dalla posizione $\theta_1 = 60°$. Raggiunto il punto C corrispondente a $\theta_2 = 30°$, il blocchetto lascia la guida e cade verso il basso.

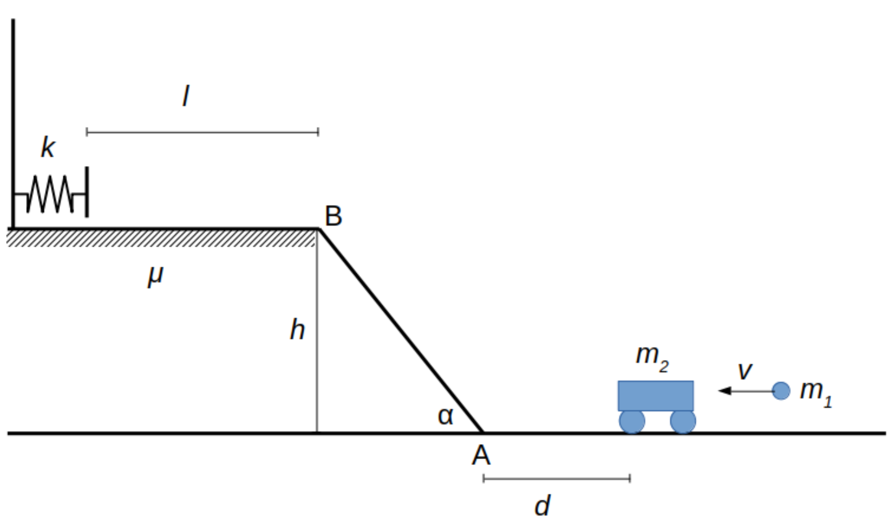
2. Determinare le velocità del blocchetto nel punto B (al fondo della guida) e nel punto C. [**4 punti**]
3. Determinare la distanza orizzontale $\tilde{x}$, a partire dal punto C, alla quale il blocchetto cade sul piano. [**6 punti**]
4. Determinare la reazione vincolare sviluppata dalla guida nel punto B. [**3 punti**]



Esercizio 2

Un proiettile di massa $m_1 = 10$ kg viene lanciato a velocità $v = 220$ m/s contro un carrello di massa $m_2 = 100$ kg inizialmente fermo, con il quale effettua un urto anelastico. Il sistema si muove dapprima senza attrito, incontrando un piano inclinato liscio come in figura ($h = 8$ m, $\alpha = 50°$). Raggiunta la sommità (punto B), il sistema si muove lungo un piano orizzontale scabro ($\mu = 0.1$) per un tratto $l = 10$ m, dopo di che incontra una molla con lunghezza a riposo pari a 1 m.

1. Calcolare la velocità del sistema nel punto B. [**5 punti**]
2. Calcolare il tempo impiegato per raggiungere il punto B. [**5 punti**]
3. Calcolare la costante elastica della molla se questa ferma il sistema in 0.5 m. [**6 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

- Punto 1. Detta N la reazione vincolare della guida, affinché il blocchetto sia fermo si deve avere:

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta_1 \\ F_{\text{att}} = mg\sin\theta_1 \end{cases} \tag{1}$$

con $F_{\text{att}} = \mu N$. Si verifica quindi che il blocchetto è fermo per un angolo massimo θ_1 tale che:

$$\mu\, mg\cos\theta_1 = mg\sin\theta_1 \tag{2}$$

ovvero $\boxed{\theta_1 = \arctan\mu = 11.3°}$.

- Punto 2. Senza attrito si conserva l'energia, che inizialmente nel punto A è solo potenziale. Nel punto B si avrà solo energia cinetica, mentre nel punto C una somma di due termini potenziale e cinetico. La quota del blocchetto nel punto A è $R(1-\cos\theta_1)$ mentre quella nel punto C è $R(1-\cos\theta_2)$. Pertanto, per calcolare v_B usiamo:

$$mgR(1-\cos\theta_1) = \frac{1}{2}mv_B^2 \tag{3}$$

da cui si ricava $\boxed{v_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta_1)} = 3.13 \text{ m/s}}$. Invece, per calcolare v_C usiamo:

$$mgR(1-\cos\theta_1) = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgR(1-\cos\theta_2) \tag{4}$$

da cui si ricava $\boxed{v_C = \sqrt{2gR(\cos\theta_2-\cos\theta_1)} = 2.68 \text{ m/s}}$.

- Punto 3. Lungo x si ha un moto rettilineo uniforme, lungo y un moto uniformemente accelerato. La velocità iniziale del blocchetto nel punto C lungo x e y vale:

$$\begin{cases} v_{C,x} = v_C\cos\theta_2 \\ v_{C,y} = v_C\sin\theta_2 \end{cases} \tag{5}$$

La traiettoria è quindi data da:

$$\begin{cases} x(t) = v_C\cos\theta_2\cdot t \\ y(t) = y_C + v_C\sin\theta_2\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{6}$$

dove $y_C = R(1-\cos\theta_2) = 0.134$ m.

Definiamo $\tilde{t}$ l'istante in cui il blocchetto tocca il piano orizzontale. Dalla prima equazione del sistema (6), si ha:

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{x}}{v_C\cos\theta_2} \tag{7}$$

Inserendo questa espressione nella seconda equazione del sistema (6), e imponendo la condizione $y(\tilde{t}) = 0$, si ottiene:

$$0 = y_C + v_C\sin\theta_2\cdot\tilde{t} - \frac{1}{2}g\tilde{t}^2 \tag{8}$$

ovvero:

$$\frac{g}{2v_C^2\cos^2\theta_2}\tilde{x}^2 - \tan\theta_2\cdot\tilde{x} - y_C = 0 \tag{9}$$

che ha soluzioni:

$$\tilde{x}_\pm = \frac{\tan\theta_2 \pm \sqrt{\tan^2\theta_2 + 2gy_C/(v_C^2\cos^2\theta_2)}}{g/(v_C^2\cos^2\theta_2)} \tag{10}$$

e la soluzione fisica che ci interessa è quella positiva $\boxed{\tilde{x}_+ = 0.81 \text{ m}}$ (mentre il tempo è $\tilde{t} = 0.35$ s).

- Punto 4. Quando il blocchetto passa per il punto B, si ha:

$$F = ma \Rightarrow N - mg = m\frac{v_B^2}{R} \tag{11}$$

pertanto, $\boxed{N = m(g + v_B^2/R) = 9.81 \text{ N}}$.

Soluzione del secondo esercizio:

- Punto 1. La velocità V del sistema carrello+proiettile dopo l'urto si ricava dalla conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v = 20\,\text{m/s} \tag{12}$$

La velocità V_B nel punto B si ricava dalla conservazione dell'energia. Definiamo $M \equiv m_1 + m_2$:

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_B^2 + Mgh \Rightarrow \boxed{V_B = \sqrt{V^2 - 2gh} = 15.59\,\text{m/s}} \tag{13}$$

- Punto 2. Il carrello si muove fino al punto A con velocità costante, impiegando un tempo:

$$t_A = \frac{d}{V} = 0.5\,\text{s} \tag{14}$$

Lungo il piano inclinato, invece, il carrello risente di una forza di modulo $mg\sin\alpha$ parallela al piano e con verso contrario a quello del moto. Quindi si ha un moto uniformemente decelerato:

$$V(t_B) = V - a \cdot t_B = V - g\sin\alpha \cdot t_B \tag{15}$$

Allora:

$$t_B = \frac{V - V_B}{g\sin\alpha} = \frac{V - \sqrt{V^2 - 2gh}}{g\sin\alpha} = 0.59\,\text{s} \tag{16}$$

e il tempo totale è $\boxed{t_A + t_B = 1.09 \text{ s}}$.

- Punto 3. Possiamo sfruttare l'uguaglianza tra lavoro fatto dall'attrito e variazione di energia meccanica. L'energia del sistema nel punto B è solo cinetica:

$$E_{\text{in}} = \frac{1}{2}MV_B^2 \tag{17}$$

mentre alla fine, quando il carrello si ferma e la molla è compressa di un tratto $\Delta x = 0.5$ m, l'energia è solo potenziale:

$$E_{\text{fin}} = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \tag{18}$$

Il lavoro fatto dall'attrito è:

$$L_{\text{att}} = F_{\text{att}} \cdot (l + \Delta x) = -\mu Mg(l + \Delta x) \tag{19}$$

quindi:

$$E_{\text{fin}} - E_{\text{in}} = L_{\text{att}} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k\Delta x^2 - \frac{1}{2}MV_B^2 = -\mu Mg(l + \Delta x) \tag{21}$$

Infine,

$$\boxed{k = \frac{M[V_B^2 - 2\mu g(l + \Delta x)]}{\Delta x^2} = 97876.7\,\text{N/m}} \tag{22}$$