Primo Esonero - 8 Aprile 2019

Soluzione Esercizio 1

Scriviamo il secondo principio della dinamica per le tre masse:

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 a \\ T_2 - T_1 &= m_2 a \\ m_3 g - T_2 &= m_3 a \end{aligned} \tag{1}$$

Notiamo che abbiamo inserito la stessa accelerazione perché le corde sono inestensibili, e solo due tensioni perché esse sono di massa trascurabile. Ricaviamo T_2 dalla terza equazione e sostituiamo nella seconda:

$$m_3 g - m_3 a - m_1 a = m_2 a \tag{2}$$

da cui ricaviamo:

$$a = \frac{m_3 g}{m_1 + m_2 + m_3} = 3.27 m/s^2 \tag{3}$$

Le tensioni saranno allora:

$$\begin{aligned} T_1 &= 9.81 N \\ T_2 &= 13.06 N \end{aligned} \tag{4}$$

Nel caso di attrito il secondo principio della dinamica risulterà modificato:

$$\begin{aligned} T_1 - \mu_1 m_1 g &= m_1 a \\ T_2 - T_1 - \mu_2 m_2 g &= m_2 a \\ m_3 g - T_2 &= m_3 a \end{aligned} \tag{5}$$

Se il sistema deve rimanere fermo, allora $a = 0$, quindi avremo:

$$\begin{aligned} T_1 - \mu_1 m_1 g &= 0 \\ T_2 - T_1 - \mu_2 m_2 g &= 0 \\ m_3 g - T_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Da cui ricaviamo:

$$m_3 g - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g = 0 \tag{7}$$

E infine:

$$\mu_1 = \frac{m_3 - \mu_2 m_2}{m_1} = 0.63 \tag{8}$$

Infine, se sostituisco la corda T_1 con una molla, il moto è lo stesso del punto 1, con la differenza che la tensione sarà sostituita dalla forza elastica della molla che si deforma: nelle equazioni del moto basterà sostituire T_1 con kx, dove x è l'elongazione della molla. Ma allora avremo:

$$x = \frac{T_1}{k} = 0.19 m \tag{9}$$

Soluzione Esercizio 2

Nei primi due casi non c'è attrito, quindi l'energia meccanica si conserva.
Nel punto i in cui la massa avrà solo energia potenziale elastica, mentre nel punto f solo energia potenziale gravitazionale, dato che la sua velocità in quel punto sarà nulla. Possiamo allora scrivere la conservazione dell'energia come:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = mgy_f \tag{10}$$

da cui:

$$y_f = \frac{k\Delta x^2}{2mg} = 1.33m \tag{11}$$

La distanza lungo il piano inclinato sarà allora:

$$s = \frac{y_f}{sen\theta} = 3.14m \tag{12}$$

Indichiamo ora con h il punto a metà strada tra i e f. Dalla conservazione dell'energia posso ricavare:

$$\frac{1}{2}mv_h^2 + mgy_h = mgy_f \tag{13}$$

dove $y_h = \frac{1}{2}y_f$. Avrò quindi:

$$v_h = \sqrt{gy_f} = 3.6m/s \tag{14}$$

Infine, se il piano è scabro, l'energia meccanica totale non si conserva:

$$E_{finale} = E_{iniziale} - W_{attrito} \tag{15}$$

dove:

$$W_{attrito} = \mu mgcos\theta \frac{y'_f}{sen\theta} \tag{16}$$

Avremo quindi:

$$mgy'_f = \frac{1}{2}k\Delta x^2 - \mu mgcos\theta \frac{y'_f}{sen\theta} \tag{17}$$

da cui ricaviamo:

$$y'_f = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \left(\frac{1}{mg + \mu mgcot\theta} \right) = 0.81m \tag{18}$$

che corrisponde ad una distanza sul piano inclinato pari a:

$$s' = \frac{y'_f}{sen\theta} = 1.91m \tag{19}$$