ESERCITAZIONI DI FISICA I

ANNO ACCADEMICO 2022/2023

PRIMA ESERCITAZIONE

Esercizio 1

Un punto è in moto lungo l'asse x con velocità costante v_1; al tempo $t=0$ si trova nella posizione $x=x_1$. All'istante $t=t_0$ viene lanciato un altro punto che si muove lungo l'asse x con velocità costante v_2. Determinare se, dove e quando il secondo punto raggiungerà il primo.
Per $t > t_0' > t_0$ il secondo punto risente di un'accelerazione negativa $-a$. Raggiunge ancora il primo punto?

Per comodità chiamiamo il primo punto A e il secondo B. Poiché il punto B parte all'istante t_0, le equazioni del moto per i due punti saranno:

(A) $$x_A = x_1 + v_1$$

(B) $$x_B = v_2 (t - t_0)$$

I punti si incontreranno in un certo istante $\tilde{t}$ tale che:

$$x_A(\tilde{t}) = x_B(\tilde{t})$$

ma allora:

$$x_1 + v_1 \tilde{t} = v_2 \tilde{t} - v_2 t_0$$

da cui:

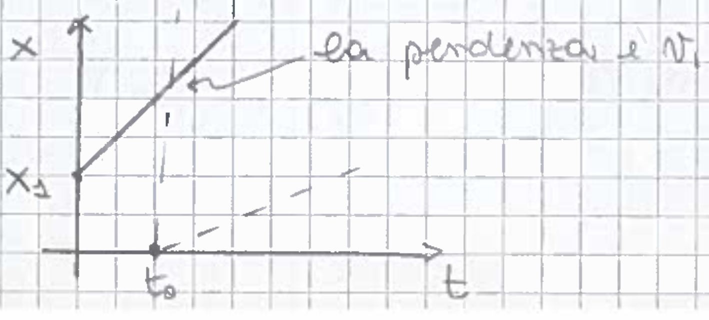
$$x_1 + (v_1 - v_2)\tilde{t} = -v_2 t_0$$

$$\tilde{t} = \frac{x_1 + v_2 t_0}{v_2 - v_1} \qquad \frac{[L] + [L]\cancel{[T]^{-1}}\cancel{[T]}}{[L][T]^{-1}} = [T]$$

Affinché questa espressione abbia senso, dev'essere:

$$\tilde{t} > 0 \implies v_2 > v_1$$ solo in questo caso B raggiunge A

Alla stessa conclusione potrei giungere attraverso il diagramma orario, che descrive $x(t)$:



Affinché la curva tratteggiata tocchi quella continua, la pendenza dev'essere maggiore di v_1 (altrimenti se fosse $= v_1$ sarebbero parallele)

(È vero che anche l'altra curva tratteggiata interseca la linea continua, ma lo fa nel III quadrante, cioè per valori NEGATIVI di t, il che non è fisico)

Per ottenere la posizione in cui avviene l'incontro (posto che $v_2 > v_1$) basta valutare:

$$\tilde{x} = x_A(\tilde{t}) = x_1 + v_1 \tilde{t} = x_1 + v_1 \frac{x_1 + v_2 t_0}{v_2 - v_1} =$$

$$= \frac{v_2 x_1 - \cancel{v_1 x_1} + \cancel{v_1 x_1} + v_1 v_2 t_0}{v_2 - v_1} = v_2 \frac{x_1 + v_1 t_0}{v_2 - v_1}$$

Dimensionalmente abbiamo:

$$[L][T]^{-1} \frac{[L] + [L][T^{-1}][T]}{[L][T]^{-1}} = [L]$$

Consideriamo ora un certo istante compreso tra t_0, cioè quando parte B, e $\tilde{t}$, cioè quando si incontrano. Lo chiamiamo t_0':

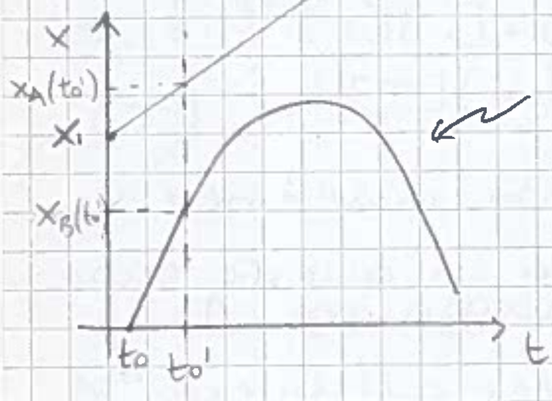
$$t_0 < t_0' < \tilde{t}$$

La traccia ci dice che dopo questo tempo t_0' il punto B subisce un'accelerazione negativa $-a$ (costante). In questo caso la legge oraria sarà:

Ⓐ $x_A(t) = x_A(t_0') + v_1 (t - t_0')$

Ⓑ $x_B(t) = x_B(t_0') + v_2 (t - t_0') - \frac{1}{2} a (t - t_0')^2$

dove $x_A(t_0')$ e $x_B(t_0')$ sono le posizioni che avranno A e B al tempo t_0'. Il diagramma orario ora cambia:



dopo t_0' il punto A continua il suo moto uniforme, mentre quello di B diventa uniformemente DECELERATO, e quindi ho una parabola

Ora le due curve quando e SE si intersecheranno? Imponiamo:

$$\underbrace{x_A(t_0')}_{\overline{x_A}} + v_1 (t - t_0') = \underbrace{x_B(t_0')}_{\overline{x_B}} + v_2 (t - t_0') - \frac{1}{2} a (t - t_0')^2$$

Quindi:

$$\overline{x_A} + v_1 (t - t_0') = \overline{x_B} + v_2 (t - t_0') - \frac{1}{2} a (t - t_0')^2$$

$$(t - t_0') [v_1 - v_2] + \frac{1}{2} a (t - t_0')^2 = \overline{x_B} - \overline{x_A}$$

$$\frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da cui:

$$(t - t_0')_{1,2} = \frac{v_2 - v_1 \mp \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2a(\overline{x_A} - \overline{x_B})}}{a}$$

La soluzione è reale (cioè ha senso fisico) solo quando:

$$(v_1 - v_2)^2 - 2a(\overline{x_A} - \overline{x_B}) \geq 0$$

È solo quando questa viene verificata che il punto B raggiunge A. Ma allora:

$$2a(\overline{x_A} - \overline{x_B}) \leq (v_1 - v_2)^2$$

$$a \leq \frac{(v_1 - v_2)^2}{2(\overline{x_A} - \overline{x_B})} \qquad \frac{([L][T]^{-1})^2}{[L]} = [L][T]^{-2}$$

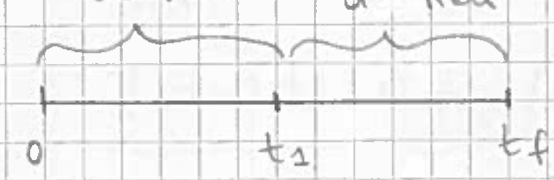
Se il punto B ha un'accelerazione (in modulo) maggiore di questo potrà evitare lo scontro.

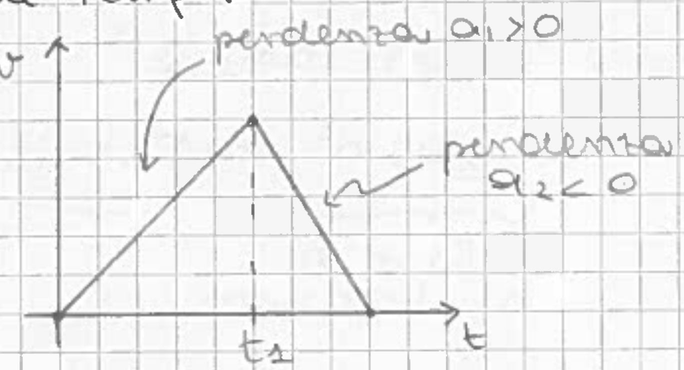
Esercizio 2

Il motore di un'auto può imprimere un'accelerazione massima $a_1 = 2\ m/s^2$ e l'impianto di frenata può decelerare al massimo con $a_2 = -4\ m/s^2$. Calcolare il tempo minimo necessario affinché l'auto, partendo da ferma, arrivi in un punto distante 500 m con velocità nulla.

Per giungere a 500 m di distanza partendo a velocità nulla e arrivando a velocità nulla IN UN TEMPO MINIMO devo sfruttare al massimo le potenzialità della mia auto, raggiungendo a_1 in fase di accelerazione e a_2 in fase di decelerazione.

Dividiamo il moto in due tempi:





Scriviamo la legge oraria nelle due fasi:

fase accelerazione: $v = a_1 t \Rightarrow v_1 = v(t_1) = a_1 t_1$

fase decelerazione: $v(t) = v_1 + a_2 (t - t_1) = a_1 t_1 + a_2 (t-$

Ora, abbiamo un'ulteriore condizione, e' cioe' che l'auto deve arrivare a 500 m a velocita' nulla, ovvero:

$$v(t_f) = 0 \Rightarrow a_1 t_1 + a_2 (t_f - t_1) = 0$$

Da cui:

$$a_1 t_1 + a_2 (t_f - t_1) = 0$$

$$a_1 t_1 + a_2 t_f - a_2 t_1 = 0$$

$$(a_1 - a_2) t_1 + a_2 t_f = 0$$

$$t_f = \frac{a_2 - a_1}{a_2} t_1 = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) t_1$$

Avremo cioe':

$$t_f = \left(1 + \frac{2\,m/s^2}{4\,m/s^2}\right) t_1 = \frac{3}{2} t_1$$

Ovvero:

$$t_1 = \frac{2}{3} t_f$$

se $a_1 = a_2$ avremmo avuto t_1 esattamente a meta' del tempo

Ora invece abbiamo che l'auto deve passare piu' tempo ad accelerare (i 2/3 del tempo totale) che a decelerare - il che e' intuitivo dato che $a_2 > a_1$

Ora conosciamo il rapporto tra t_1 e t_f, ma non conosciamo ne' l'uno ne' l'altro. Per esplicitarli, manca un'altra condizione: quella sullo spazio percorso:

$$x(t_f) = 500\ m$$

Ma cos'e' $x(t_f)$? Avremo:

$$x(t_f) = \underbrace{\frac{1}{2} a_1 t_1^2}_{\text{fase di accelerazione}} + \underbrace{v(t_1)(t_f - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t_f - t_1)^2}_{\text{fase di decelerazione}}$$

Sappiamo poi che:

$$v(t_1) = a_1 t_1 \quad , \quad t_1 = \frac{2}{3} t_f \quad o \quad t_f = \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) t_1$$

Ma allora:

$$x(t_f) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + a_1 t_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) t_1 - a_1 t_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} a_2 \left[\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) t_1 - t_1\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) a_1 t_1^2 - a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)^2 t_1^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} a_2 t_1^2 - a_2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) t_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \cancel{a_1 t_1^2} - \frac{a_1^2}{a_2} t_1^2 - \cancel{a_1 t_1^2} + \frac{1}{2} a_2 t_1^2 + \frac{1}{2} \cancel{a_2} \frac{a_1^2}{a_2^{\cancel{2}}} t_1^2$$
$$- \cancel{a_2} \frac{a_1}{\cancel{a_2}} t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_1^2 - a_2 t_1^2 + a_1 t_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2} a_1 - \frac{a_1^2}{a_2} + \cancel{\frac{1}{2} a_2} + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} - \cancel{a_1} + \cancel{\frac{1}{2} a_2} - \cancel{a_2} + \cancel{a_1}\right] t_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(a_1 - \frac{a_1^2}{a_2}\right) t_1^2 = x(t_f)$$

Da cui:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 x(t_f)}{a_1 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)}} = 18.25 \text{ s}$$

Ma allora:

$$t_f = 27.4 \text{ s}$$

Posso anche calcolare:

$$x(t_1) = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \cancel{a_1} \frac{2 x(t_f)}{\cancel{a_1} \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)} =$$

$$= \frac{x(t_f)}{1 - a_1/a_2} = \frac{2}{3} x(t_f)$$

Esercizio 3

Un punto materiale viene lasciato cadere verticalmen allo istante $t=0$ dall'origine di un'asse x orientato verso il basso. Un secondo punto materiale viene lanciato dall'origine dello stesso asse verso il basso con velocità v_2 all'istante $t=t_0$. Raggiungerà il primo punto?

Abbiamo un moto di caduta libera di due corpi: uno lasciato cadere e l'altro lanciato verso il basso. Le equazioni orarie saranno:

$$x_1 = \frac{1}{2} g t^2$$

$$x_2 = v_2 (t - t_0) + \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

I punti si raggiungeranno quando $x_1 = x_2$: indichia con $\hat{t}$ l'istante in cui succede:

$$x_1 = x_2$$

$$\frac{1}{2} g \hat{t}^2 = v_2 (\hat{t} - t_0) + \frac{1}{2} g (\hat{t} - t_0)^2$$

Da cui:

$$\cancel{\frac{1}{2} g \hat{t}^2} = v_2 \hat{t} - v_2 t_0 + \cancel{\frac{1}{2} g \hat{t}^2} + \frac{1}{2} g t_0^2 - g \hat{t} t_0$$

Ma allora:

$$(v_2 - g t_0)\hat{t} = v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

E:

$$\hat{t} = \frac{v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - g t_0}$$

Per essere sensata la soluzione, dev'essere $\hat{t} > t_0$, ovv

$$\frac{v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - g t_0} > t_0$$

~~Da cui~~

$$\cancel{v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 > v_2 t_0 - g t_0^2}$$

$$\cancel{\frac{1}{2} g t_0 > 0}$$

Da cui:

$$\frac{v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - g t_0} - t_0 > 0$$

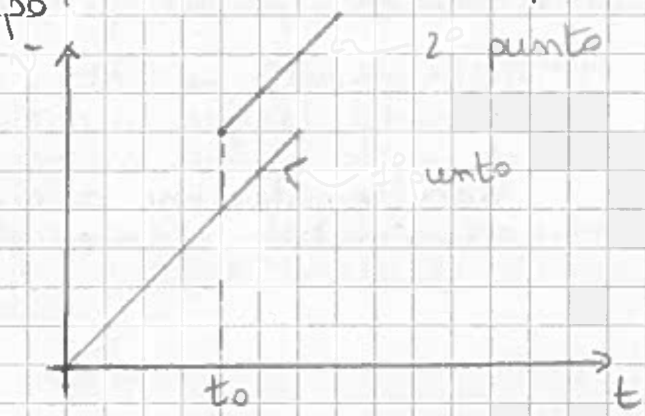
$$\frac{\cancel{v_2 t_0} - \frac{1}{2} g t_0^2 - \cancel{v_2 t_0} + g t_0^2}{v_2 - g t_0} > 0$$

$$\frac{\frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - g t_0} > 0 \qquad \text{ma} \quad \frac{1}{2} g t_0^2 > 0$$

Quindi rimane la condizione:

$$v_2 - g t_0 > 0 \Rightarrow v_2 > g t_0$$

Posso arrivare alla stessa conclusione in modo alternativo. Disegnamo il moto dei punti nel grafico velocità tempo.

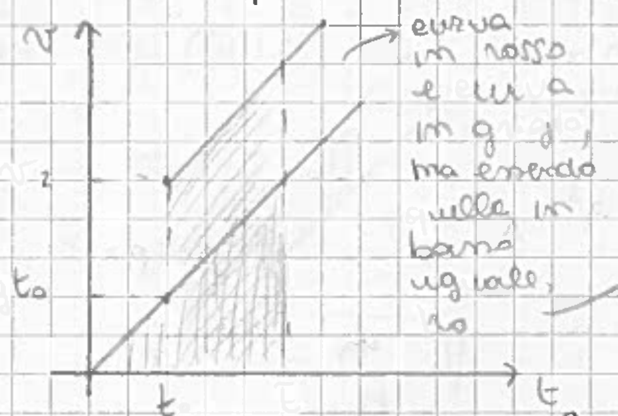


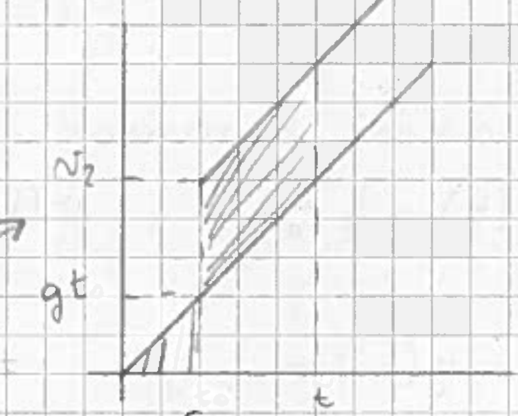
Per $t > t_0$ le due curve hanno la stessa pendenza, che è pari all'accelerazione di gravità g (che è la derivata rispetto al tempo della velocità).

Lo spazio percorso è l'AREA SOTTESA dalle curve, cioè l'integrale:

$$\int_0^t v(t)\,dt$$

Allora il ~~/~~ secondo punto raggiunge il primo solo se l'area sottesa dalla sua curva eguaglia quella sottesa dalla prima curva.





Ciò si ha quando area del triangolo (che chiamiamo A_1) eguaglia quella del parallelogramma (A_2)

$$A_1 = \frac{t_0\, g t_0}{2} \qquad A_2 = (\tilde{t} - t_0)(v_2 - g t_0)$$

Ma allora:

$$A_1 = A_2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t_0^2 = v_2 \tilde{t} - v_2 t_0 - g t_0 \hat{t} + g t_0^2$$

Ovvero:

$$\frac{1}{2} g t_0^2 = \tilde{t}\,(v_2 - g t_0) - v_2 t_0 + g t_0^2$$

Il che ci porta a:

$$\hat{t} = \frac{v_2 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2}{v_2 - g t_0}$$

che è lo stesso valore di $\tilde{t}$ trovato prima.
Ricaviamo anche la condizione di prima, perché deve essere

$$v_2 - g t_0 > 0$$

altrimenti, se $v_2 < g t_0$, la seconda curva sarebbe al di sotto della prima, e quindi non esisterebbe alcun $\tilde{t}$ in cui le due curve sono uguali