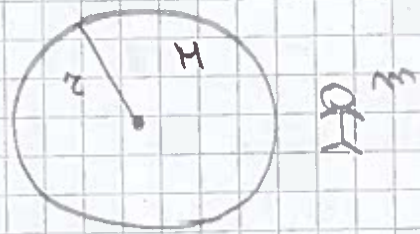
ESERCIZIO

Una piattaforma circolare di massa $M = 250$ Kg e raggio $r = 10$ m ruota senza attrito attorno ad un asse verticale che passa per il centro con una velocità angolare $\omega_0 = 0.1$ rad/s. Un signore di massa $m = 75$ Kg salta sul bordo della piattaforma senza scivolare. Trovare la velocità angolare del sistema.
Se poi il signore cammina fino a raggiungere il centro, calcolare la velocità angolare finale del sistema e il lavoro fatto dall'uomo.



$M = 250$ Kg $\quad r = 10$ m

$\omega_0 = 0.1$ rad/s

$m = 75$ Kg

Poiché sul sistema non agiscono forze esterne, si conserva il momento angolare. In questo caso, poi, l'asse di rotazione è un asse di simmetria del corpo, quindi:

$$L_0 = I_0 \omega_0 \qquad \text{momento angolare iniziale}$$

dove ω_0 è nota mentre I_0 è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione, ovvero:

$$I_0 = \int r^2 dm = \int \rho_s r^2 dS$$

dove ρ_s è la densità superficiale del disco e dS l'elemento di superficie, che in coordinate polari è:

$$dS = r\, d\theta\, dr$$

ma allora:

$$I_0 = \int \rho_s r^2 dS = \int \rho_s r^2 r\, d\theta\, dr = \rho_s \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr$$

con R raggio del disco. Avremo allora:

$$I_0 = 2\pi \rho_s \frac{R^4}{4_2} = (\pi R^2) \rho_s \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2} M R^2$$

essendo πR^2 la superficie del disco, $(\pi R^2)\rho_s$ è la massa totale del disco. Nel nostro caso avremo:

$$I_0 = \frac{1}{2} M r^2$$

Dalla conservazione del momento angolare avremo:

$$I_0 \omega_0 = I' \omega'$$

dove I' è il momento di inerzia complessivo, cioè del

isco e dell'uomo. Essendo il momento di inerzia additivo
è definito attraverso sommatorie o integrali) avremo:

$$I' = \underbrace{\frac{1}{2}Mr^2}_{\text{momento del disco}} + \underbrace{mr^2}_{\text{momento dell'uomo a distanza } r}$$

a allora:

$$\omega' = \frac{I_0}{I'}\omega_0 = \frac{M}{M+2m}\omega_0 = 6.25\times10^{-2}\ rad/s$$

uando l'uomo raggiunge il centro del disco il suo
momento di inerzia si annulla, quindi il momento totale
orna a essere I_0; quindi, avremo:

$$\omega_{finale} = \omega_0$$

l lavoro svolto dall'uomo sarà:

$$L = \Delta E_{cinetica} = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 - \frac{1}{2}I'\omega'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 - \frac{1}{2}I'\frac{I_0^2}{I'^2}\omega_0^2 = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2\left(1-\frac{I_0}{I'}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}I_0\omega_0^2\left(1-\frac{M}{M+2m}\right) = \frac{1}{2}I_0\omega_0^2\frac{2m}{M+2m}$$

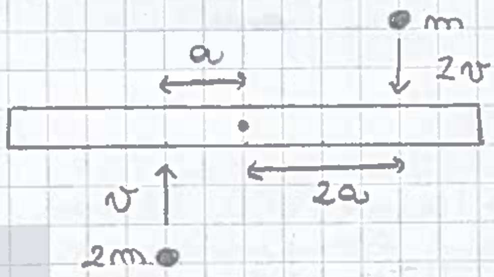
sostituendo $I_0 = \frac{1}{2}Mr^2$ avremo:

$$L = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+2m}\omega_0^2 r^2 = 23.4\ J$$

ESERCIZIO

Una sbarra uniforme di lunghezza 6a e massa 8m si trova su un tavolo liscio orizzontale. Due masse puntiformi, rispettivamente m e 2m, si muovono sullo stesso piano orizzontale con velocità 2v e v. Esse colpiscono la sbarretta come in figura restandovi attaccate. Trovare:

1. La velocità del centro di massa
2. Il momento angolare
3. La velocità angolare
4. L'energia cinetica di rotazione



Essendo il sistema isolato, cioè non soggetto a forze esterne, la quantità di moto totale è conservata:

$$(2m)v - m(2v) = 8mv_c$$

con v_c velocità finale del centro di massa. Avremo allora:

$$8mv_c = 0 \Rightarrow v_c = 0$$

Il momento angolare totale sarà invece dato da:

$$\overline{L}_{TOT} = \sum_i \overline{r}_i \wedge m_i \overline{v}_i$$

Scegliamo il centro della sbarra come polo; $\overline{r}$ e $\overline{v}$ saranno ortogonali tra loro per entrambe le masse, quindi:

$$L_i = 2m\,v\,a + m\,2v\,2a = 6mva$$

(la direzione è ortogonale al piano e il verso è entrante). Poiché le forze esterne sono nulle, anche il loro momento lo sarà, quindi si conserva il momento angolare:

$$L_i = L_f = I\omega$$

Da cui:

$$\omega = \frac{L_i}{I} = \frac{6mva}{I}$$

Qui I è il momento di inerzia della sbarra rispetto al suo centro:

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

Nel nostro caso però dobbiamo aggiungere anche il contributo delle due masse rimaste attaccate:

$$I = \frac{1}{12}(8m)(6a)^2 + 2ma^2 + m(2a)^2 = 30\,ma^2$$

Ho allora:

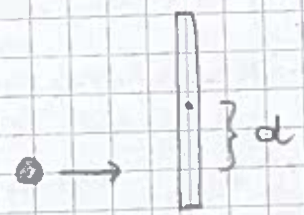
$$\omega = \frac{6mva}{30ma^2} = \frac{v}{5a}$$

Questa è la velocità angolare della sbarra dopo che l'urto è avvenuto; l'energia cinetica di rotazione sarà allora data da:

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(30ma^2)\frac{v^2}{25a^2} = \frac{3}{5} mv^2$$

ESERCIZIO

Un bastone di lunghezza l e massa M è posto su un tavolo orizzontale privo di attrito. Un disco da hockey di massa m, che scivola sul tavolo perpendicolarmente al bastone con velocità v, colpisce elasticamente il bastone ad una distanza d dal centro.
Trovare d se il disco si arresta subito dopo l'urto.



Poiché non agiscono forze esterne, il momento angolare si conserva:

$$mvd = I\omega$$

da cui:

$$\omega = \frac{mvd}{I}$$

Si conserva poi anche la quantità di moto:

$$mv = Mv_c \rightarrow v_c = \frac{m}{M}v$$

e anche l'energia (l'urto è elastico):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_c^2$$

Il moto del bastone dopo l'urto, infatti, è di roto-traslazione.
Calcoliamo il momento di inerzia rispetto al centro del bastone:

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho_L dr = \rho \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr =$$

$$= \rho\left[\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24}\right] = \frac{1}{12}Ml^2$$

dove abbiamo inserito $M = \rho l$.
Sostituiamo nella conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2v^2d^2}{I} + \frac{1}{2}\frac{m^2v^2}{M}$$

e ancora:

$$1 = \frac{12d^2m}{Ml^2} + \frac{m}{M}$$

da cui:

$$M - m = 12\, m \frac{d^2}{\ell^2} \longrightarrow d^2 = \frac{\ell^2 (M-m)}{12\, m}$$

E infine:

$$d = \frac{\ell}{2}\sqrt{\frac{M-m}{3m}}$$