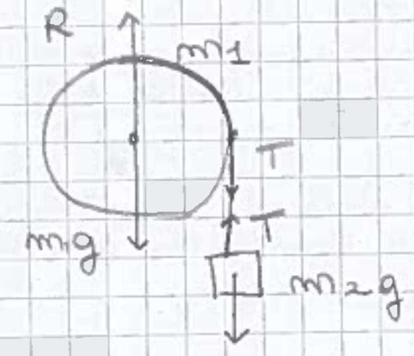
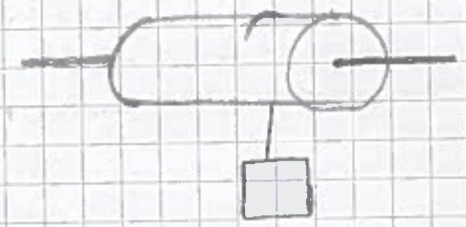
ESERCIZIO

Un cilindro di massa $m_1 = 12$ kg puo' ruotare senza attrito attorno al proprio asse disposto orizzontalmente. Attorno al cilindro e' avvolto un filo che non scivola e che sostiene un corpo di massa $m_2 = 2$ kg. Inizialmente il sistema e' in quiete. Calcolare il valore dell'accelerazione con cui scende il corpo e il valore della tensione del filo.





Le forze esterne al sistema sono:

1) La forza peso del cilindro
2) La forza peso del blocco m_2
3) La reazione vincolare dell'asse che sostiene il cilindro

La tensione T e' invece una forza interna. Ora, poiche' il filo non scivola l'accelerazione e la velocita' di m_2 sono uguali a quelle di un punto sul bordo del cilindro a cui il filo e' attaccato:

$$a = \alpha r \quad , \quad v = \omega r$$

dove r e' il raggio del cilindro. Scegliendo come polo il centro del disco posso calcolare il momento angolare totale:

$$m_2 v r + I\omega$$

dove I e' il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse di rotazione scelto (che e' un asse di simmetria. Esso varra':

$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho \, dV = \int \rho r^2 r \, dr \, d\theta \, dl =$$

$$= \rho \int_0^l dl \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r r^3 dr = \rho \, 2\pi l \frac{r^4}{4}$$

con l lunghezza del cilindro ed r raggio. Se introduciamo $\pi r^2 l$, cioe' il volume del cilindro, possiamo scrivere:

$$I = \rho (\pi r^2 l) \frac{1}{2} r^2 = \frac{1}{2} m_1 r^2$$

Possiamo quindi calcolare il momento angolare totale, che rà:

$$m_2 v r + \frac{1}{2} m_1 r^2 \omega$$

l momento delle forze esterne e' legato ad L secondo:

$$M = \frac{dL}{dt}$$ teorema del momento angolare

unica forza esterna che ha momento non nullo e' la orza peso di m_2 (poiche' il suo punto di applicazione non oincide con il polo scelto):

$$M = m_2 g r$$ (ha verso entrante nel foglio)

a allora:

$$M = \frac{dL}{dt} \Rightarrow m_2 g r = \frac{d}{dt}\left(m_2 v r + \frac{1}{2} m_1 \omega r^2\right)$$

ome abbiamo visto $a = \alpha r$, quindi:

$$m_2 g r = m_2 \alpha r^2 + \frac{1}{2} m_1 \alpha r^2 = \left(m_2 + \frac{1}{2} m_1\right) \alpha r^2$$

da cui:

$$\alpha = \frac{2 m_2}{m_1 + 2 m_2} \frac{g}{r}$$

e infine:

$$a = \alpha r = \frac{2 m_2}{m_1 + 2 m_2} g = 2.45 \text{ m/s}^2$$

er calcolare T devo considerare la dinamica del orpo m_2. La seconda legge della dinamica mi dà:

$$m_2 g - T = m_2 a$$

a cui:

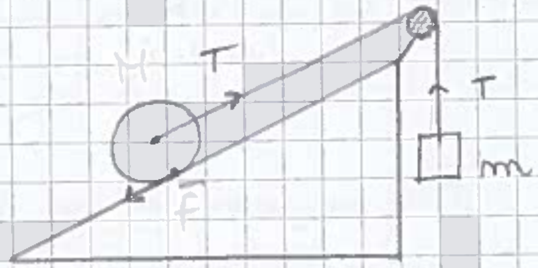
$$T = m_2 (g - a) = m_2 g \left(1 - \frac{2 m_2}{m_1 + 2 m_2}\right) = m_2 g \left(\frac{m_1}{m_1 + 2 m_2}\right) =$$

$$= 14.7 \text{ N}$$

ESERCIZIO

Un disco di massa M = 8 kg e raggio R e' posto sopra una guida inclinata di 30°. All'asse del disco e' attaccato un blocco di massa m = 5 kg. Il filo e' teso e la massa m e' ad un'altezza h = 1.5 m dal suolo. A t=0 si libera la massa che inizia a scendere. Il moto del disco e' di puro rotolamento. Calcolare:

1) L'accelerazione con cui scende la massa
2) La velocità con cui la massa tocca terra
3) La quota massima raggiunta dal centro del disco



Scriviamo le equazioni del moto per i due corpi:

$$mg - T = ma \quad ①$$

$$T - Mg\,\text{sen}\theta - f = Ma \quad ②$$

dove f e' la forza d'attrito statico che agisce sul disco per far sì che il moto sia di puro rotolamento. Poichè essa e' applicata nel punto di contatto tra il piano e il disco, avrà un momento rispetto all'asse passante per il centro del disco:

$$\vec{M} = \bar{r} \wedge \bar{f} \Rightarrow M = Rf = I\alpha$$

Ma come sappiamo, $I = \frac{1}{2}MR^2$ e $\alpha = a/R$ essendo il filo inestensibile, quindi:

$$Rf = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \rightarrow f = \frac{1}{2}Ma$$

Dalla ① posso ricavare la tensione:

$$T = mg - ma$$

E sostituisco nella ②:

$$mg - ma - Mg\,\text{sen}\theta - \frac{1}{2}Ma = Ma$$

Da cui:

$$3Ma = 2mg - 2ma - 2Mg\,\text{sen}\theta$$

E infine:

$$a = \frac{2mg - 2Mg\,\text{sen}\theta}{3M + 2m} = 1.09\ m/s^2$$

Per calcolare la velocità con cui la massa tocca terra posso usare le equazioni del moto uniformemente accelerato:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$ con x distanza percorsa

Qui $x = 0$ e $v_0 = 0$, quindi:

$$v = \sqrt{2ah} = 1.81\ \text{m/s}$$

Quando la massa m tocca il suolo il disco avrà energia cinetica data da:

$$E_K = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}MR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv^2$$

(notiamo che la velocità dei due corpi è la stessa perché la corda è inestensibile). Possiamo ricavare la quota massima raggiunta dalla conservazione dell'energia:

$$L = Mg\Delta z = E_K$$

Da cui:

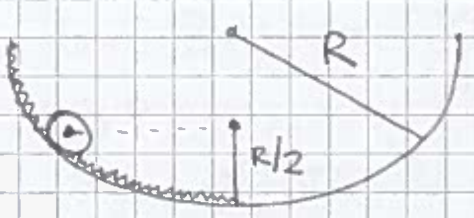
$$\Delta z = \frac{3}{4}\frac{Mv^2}{Mg} = \frac{3ah}{2g} = 0.25\ \text{m}$$

avremo:

$$\Delta x_{TOT} = \underbrace{h\,\text{sen}\,\theta}_{\text{spostamento lungo il piano del disco}} + \Delta z = 1\ \text{m}$$

ESERCIZIO

Un cilindro di raggio R/4 rotola senza strisciare dentro un tubo di raggio R. Nella metà destra del tubo l'attrito è nullo. Se all'istante inizial il cilindro è fermo e la quota del centro di mass è R/2, determinare la posizione di arrivo del cilindro e la velocità angolare ω.



Quando il cilindro si trova nel punto più basso, il suo centro di massa è sceso (rispetto alla posizione inizial di:

$$R/2 - R/4 = R/4$$

Notiamo che, poiché la forza d'attrito non compie lavoro (è applicata al punto di contatto che è ferm quindi c'è forza ma non spostamento) l'energia meccanica si conserva. Avremo allora:

$$\underbrace{mg\frac{R}{4}}_{\text{variazione energia potenziale}} = \underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2}_{\text{energia cinetica finale}}$$

Il momento I e' il momento di inerzia del cilindro rispetto all'asse passante per il suo centro e vale:

$$I = \frac{1}{2} M r^2 \quad \text{nel nostro caso} \quad I = \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{4}\right)^2$$

Essendo poi il moto di puro rotolamento vale la relazione tra ω e v_{CM}:

$$v_{CM} = \omega \frac{R}{4}$$

a allora:

$$\cancel{m} g \frac{R}{4} = \frac{1}{4} \cancel{m} \frac{R^2}{16} \omega^2 + \frac{1}{2} \cancel{m} \omega^2 \frac{R^2}{16}$$

Da cui:

$$g = \frac{1}{4} \frac{R}{16} \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{16} R \omega^2$$

E infine:

$$\omega = 4 \sqrt{\frac{g}{3R}} \quad , \quad v_{CM} = \sqrt{\frac{gR}{3}}$$

Questo nel punto più basso del tubo. Quando il cilindro inizia a risalire nella parte destra non avvertirà più attrito, quindi il moto non potrà più essere di puro rotolamento: v_{CM} e ω saranno disaccoppiate. Nel frattempo, ω resterà costante così come l'energia cinetica di rotazione, data da:

$$E_{ROTAZ.} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{\cancel{4}}\right)^2 \cancel{4}^2 \frac{g}{3\cancel{R}} =$$

$$= \frac{1}{12} mgR = \frac{1}{3} mg \left(\frac{R}{4}\right) = \text{costante}$$

a allora l'unica parte di energia cinetica che può onvertirsi in energia potenziale è quella di traslazione:

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = mg \Delta h$$

ove Δh è la quota raggiunta dal cilindro nella arte di destra e v_{CM} la velocità del CM nel punto iù basso del tubo, che abbiamo già calcolato:

$$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m \left(\omega \frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} m \frac{R^{\cancel{2}}}{\cancel{16}} 16 \frac{g}{3\cancel{R}} =$$

$$= \frac{1}{2} mg \frac{R}{3}$$

Ma allora:

$$\frac{1}{2} \cancel{mg} \frac{R}{3} = \cancel{mg} \Delta h \Rightarrow \Delta h = \frac{R}{6}$$

A questa bisogna aggiungere l'altezza del CM rispetto alla base del cilindro, in modo da ottenere la quota del CM:

$$\frac{R}{6} + \frac{R}{4} = \frac{5}{12} R = \frac{5}{6}\left(\frac{R}{2}\right) < \frac{R}{2}$$

Quindi la quota raggiunta a destra è minore della quota da cui era partito il cilindro.

Da questo momento il corpo tornerà indietro con energia potenziale e cinetica; al punto più basso, avrà solo energia cinetica. Quando poi risale nel tratto a sinistra si troverà a ruotare nel verso "sbagliato" e ciò fara sì che il moto non sarà più di puro rotolamento; il punto di contatt non sarà più fermo e la forzá d'attrito compirà lavoro dissipando energia. Ma allora, dopo una serie di oscillazioni, il corpo si fermerà.