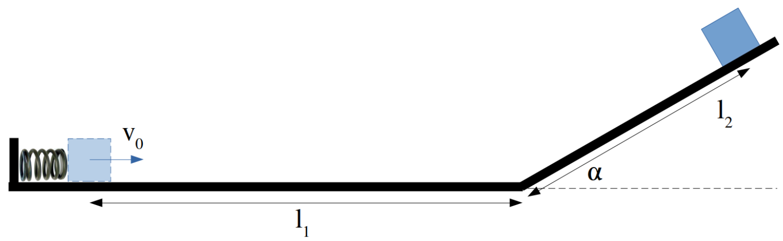
Fisica 1 - Esame scritto 13 giugno 2023

Esercizio 1

Un blocchetto di massa $m = 1.6$ kg viene lanciato su un piano orizzontale scabro $\mu = 0.2$ da una molla di costante elastica $k = 160$ N/m, inizialmente compressa di $\Delta x = 0.4$ m. Percorso un tratto $l_1 = 2$ m, il blocchetto incontra un piano inclinato con uguale coefficiente di attrito e pendenza $\alpha = 30°$.

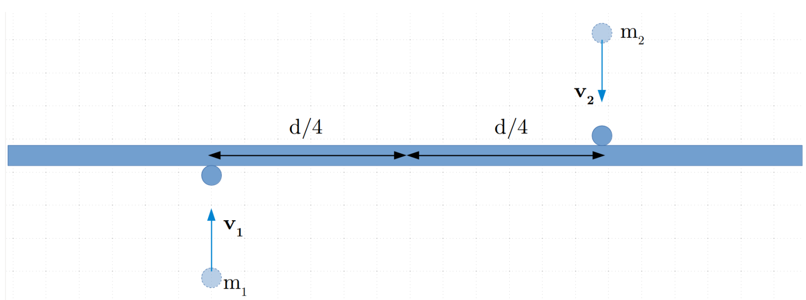
1. Calcolare la velocità iniziale del blocchetto e quella alla fine del tratto l_1. [**4 punti**]
2. Calcolare il tratto l_2 percorso dal blocchetto sul piano inclinato. [**4 punti**]
3. Raggiunta la quota massima, il blocchetto scivola indietro. Calcolare il tratto l_3 percorso successivamente sul piano orizzontale. [**4 punti**]



Esercizio 2

Su un piano orizzontale liscio si trova una sbarra di massa $M = 1$ kg e lunghezza $d = 1$ m, inizialmente in quiete. Ad un certo istante, la sbarra viene colpita da due palline di massa $m = 0.3$ kg in moto con velocità di modulo uguale, $v_1 = v_2 = 1.5$ m/s, e di verso opposto. Le palline urtano la sbarra a una distanza pari a $d/4$ dal centro di massa, come in figura, e rimangono conficcate nella sbarra.

1. Calcolare il momento d'inerzia del sistema sbarra+palline rispetto al centro di massa dopo l'urto. [**2 punti**]
2. Determinare la velocità angolare e quella del centro di massa del sistema dopo l'urto. [**4 punti**]
3. Dire se l'energia meccanica si conserva durante l'urto; se no, calcolarne la variazione. [**4 punti**]



Esercizio 3

Con $n = 2$ moli di gas perfetto monoatomico, una macchina termica effettua un ciclo costituito dalle seguenti trasformazioni, tutte reversibili:

i) isocora dallo stato A ($V_A = 8 \times 10^{-3}$ m^3, $T_A = 580$ K) allo stato B, con $T_B = T_A/2$;

ii) adiabatica dallo stato B allo stato C, con $T_C = T_A$;

iii) isoterma dallo stato C allo stato A.

1. Calcolare pressione, volume e temperatura in A, B e C. Disegnare il ciclo sul diagramma $p - V$. [**3 punti**]
2. Calcolare il rendimento del ciclo e confrontarlo con un ciclo di Carnot operante tra le temperature T_A e T_B. [**4 punti**]
3. A un certo punto, la macchina si ferma prima di completare il ciclo, quando il gas si trova nello stato C. Calcolare la variazione di entropia dell'universo. [**4 punti**]

Soluzione del primo esercizio:

1. La velocità iniziale v_0 del blocchetto si ricava dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\Delta x = 4 \text{ m/s}. \tag{1}$$

Durante il moto del blocchetto, vale l'uguaglianza tra lavoro fatto dalle forze non conservative (quindi l'attrito) e variazione di energia meccanica. L'energia iniziale del blocchetto è data dalla (1). L'energia finale, percorso il tratto l_1, è solo cinetica e pari a $\frac{1}{2}mv_1^2$ con v_1 da determinare. Allora:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(1)} = \Delta E^{(1)} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{2}$$

Il modulo della forza di attrito sviluppata lungo il piano orizzontale è:

$$F_{\text{att}}^{(1)} = \mu mg \tag{3}$$

quindi:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(1)} = -F_{\text{att}}^{(1)} l_1 = -\mu mg l_1. \tag{4}$$

Da (2) e (4) si ricava:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g l_1} = 2.86 \text{ m/s}. \tag{5}$$

2. Per ricavare il tratto percorso sul piano inclinato, si può ancora usare l'uguaglianza tra lavoro fatto dall'attrito e variazione di energia meccanica. L'energia iniziale del blocchetto è solo cinetica e pari a $\frac{1}{2}mv_1^2$. L'energia finale, all'istante in cui il blocchetto si ferma, è solo potenziale e pari a $mgh = mgl_2 \sin\alpha$ dove l_2 è il tratto da determinare. Allora:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(2)} = \Delta E^{(2)} = mgl_2 \sin\alpha - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{6}$$

Stavolta la forza di attrito è sviluppata lungo il piano inclinato:

$$F_{\text{att}}^{(2)} = -\mu mg \cos\alpha. \tag{7}$$

Quindi:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(2)} = -F_{\text{att}}^{(2)} l_2 = -\mu mg \cos\alpha \, l_2. \tag{8}$$

Quindi dalle eq. (6) e (8):

$$mgl_2 \sin\alpha - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu mg \cos\alpha \, l_2 \tag{9}$$

Infine:

$$l_2 = \frac{\frac{1}{2}v_1^2}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 0.62\,\text{m}. \tag{10}$$

3. Per trovare il tratto l_3, vale lo stesso ragionamento. Stavolta l'energia iniziale del blocchetto è quella potenziale $mgl_2 \sin\alpha$ mentre l'energia finale è zero, perché il blocchetto è tornato sul piano orizzontale e si è fermato. Quindi:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(3)} = \Delta E^{(3)} = 0 - mgl_2 \sin\alpha. \tag{11}$$

Per calcolare il lavoro fatto dall'attrito, occorre considerare il tratto l_2 e il tratto l_3:

$$\mathcal{L}_{\text{att}}^{(3)} = -\mu mg l_3 - \mu mg \cos\alpha \, l_2. \tag{12}$$

Allora dalle eq. (11) e (12):

$$-mgl_2 \sin\alpha = -\mu mg l_3 - \mu mg \cos\alpha \, l_2 \tag{13}$$

e infine:

$$l_3 = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu} \, l_2 = 1.01\,\text{m}. \tag{14}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Data la simmetria del problema, il centro di massa del sistema coincide con il centro geometrico della sbarra. Il momento di inerzia della sbarra rispetto al centro di massa vale $\frac{1}{12}Md^2$. A questo bisogna aggiungere il contributo delle palline. Quindi:

$$I = \frac{1}{12}Md^2 + 2 \cdot m \left(\frac{d}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}M + \frac{1}{8}m\right) d^2 = 0.12\ kg\, m^2 \tag{15}$$

2. L'urto è anelastico. Essendo nulla la risultante delle forze esterne, si conservano quantità di moto e momento angolare. Data la conservazione della quantità di moto totale, la velocità del centro di massa rimane costante. Inizialmente era $mv_1 - mv_2 = 0$ pertanto rimane nulla anche dopo l'urto. La velocità angolare si calcola dalla conservazione del momento angolare, che inizialmente vale:

$$L_{\text{in}} = mv_1\frac{d}{4} + mv_2\frac{d}{4} = mv\frac{d}{2}. \tag{16}$$

Il momento angolare finale si scrive:

$$L_{\text{fin}} = I\omega \tag{17}$$

quindi uguagliando (16) e (17) si trova:

$$\omega = \frac{mvd}{2I} = 1.88\ rad/s \tag{18}$$

3. L'energia meccanica in generale non si conserva in un urto anelastico. Quella iniziale è solo dovuta alle palline e vale:

$$E_{\text{in}} = 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 = mv^2. \tag{19}$$

Quella finale si può invece scrivere:

$$E_{\text{fin}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{m^2v^2d^2}{8I} \tag{20}$$

dove si è inserita la (18). Infine,

$$\Delta E = E_{\text{fin}} - E_{\text{in}} = mv^2\left(1 - \frac{md^2}{8I}\right) = 0.463\ J \tag{21}$$

Soluzione del terzo esercizio:

1. Nello stato A abbiamo:

$$p_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 1.2 \times 10^6 \text{ Pa.} \tag{22}$$

Nello stato B:

$$V_B = V_A,\ T_B = \frac{T_A}{2} = 290 \text{ K},\ p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = \frac{p_A}{2} = 6 \times 10^5 \text{ Pa.} \tag{23}$$

Poiché CA è isoterma e BC è adiabatica, sappiamo che:

$$T_C = T_A,\ T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \tag{24}$$

Quindi:

$$V_C = V_B \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{1/(\gamma-1)} = 2.83 \times 10^{-3} \text{ m}^3. \tag{25}$$

Infine

$$p_C = \frac{nRT_C}{V_C} = 3.4 \times 10^6 \text{ Pa.} \tag{26}$$

2. Indicando con Q_c il calore ceduto dal gas e con Q_a il calore assorbito durante un ciclo, il rendimento si calcola come:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a}. \tag{27}$$

Occorre quindi determinare il calore ceduto e assorbito durante le diverse fasi del ciclo.

i) isocora AB:

$$Q_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = -7234 \text{ J} \tag{28}$$

ii) adiabatica BC:

$$Q_{BC} = 0 \tag{29}$$

iii) isoterma CA:

$$Q_{CA} = \mathcal{L}_{CA} = \int_C^A p\,dV = nRT_A \log\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 10023 \text{ J} \tag{30}$$

Quindi,

$$\eta = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a} = 1 - \frac{|Q_{AB}|}{Q_{CA}} = 0.28. \tag{31}$$

Un ciclo di Carnot operante tra T_A e $T_B = T_A/2$ ha rendimento pari a $1 - (T_B/T_A) = 0.5$. Quello che abbiamo trovato è minore, in linea con il teorema di Carnot.

3. Le trasformazioni sono reversibili, pertanto la variazione di entropia dell'universo è $\Delta S_{\text{univ}} = -\Delta S_{\text{gas}}$. Alla fine di ogni ciclo completato, si ha $\Delta S = 0$. L'ultimo ciclo invece non viene completato e si interrompe nello stato C. Dobbiamo quindi calcolare la variazione di entropia tra A e C. Si può procedere in almeno due modi: calcolando direttamente ΔS_{AC} sapendo che A e C sono collegati da una isoterma, oppure ponendo $\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}$. Nel primo caso possiamo scrivere:

$$\Delta S_{AC} = \frac{Q_{AC}}{T_A} = nR \log\left(\frac{V_C}{V_A}\right) = -17.3 \text{ J/K} \tag{32}$$

mentre nel secondo caso, ricordando che BC è adiabatica (quindi $\Delta S_{BC} = 0$):

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = \int_A^B \frac{dQ}{T} + 0 = nc_V \int_A^B \frac{dT}{T} = n\frac{3}{2}R \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) \tag{33}$$

e si ottiene lo stesso risultato della (31). La variazione di entropia dell'universo è quindi:

$$\Delta S_{\text{univ}} = -\Delta S_{\text{gas}} = 17.3 \text{ J/K.} \tag{34}$$