Esonero di Fisica Generale 2

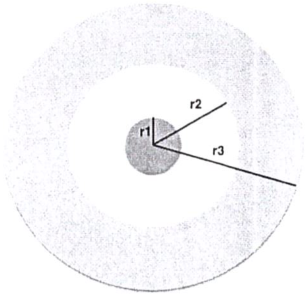
2 Aprile 2014

ESERCIZIO 1

Su una sfera non conduttrice carica di raggio $R_1 = 5\,\mathrm{cm}$ è distribuita una carica con densità $\rho_1 = K/r$. La sfera è contenuta all'interno di un guscio sferico non conduttore di raggio interno $R_2 = 10\,\mathrm{cm}$ e raggio esterno $R_3 = 20\,\mathrm{cm}$ su cui è distribuita una carica con densità uniforme $\rho_2 = 5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^3}$. Calcolare:

1. L'espressione del campo elettrico in tutto lo spazio (6 punti)
2. Il potenziale nel centro della sfera (5 punti)

Se un elettrone viene abbandonato con velocità nulla in un punto a distanza $d = 60\,\mathrm{cm}$ dal centro della sfera, calcolare la velocità con cui raggiunge la superficie esterna del guscio. (5 punti)
($K_1 = 1\ \mathrm{nC/m^2}$, Carica dell'elettrone: $q_e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, Massa dell'elettrone: $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\,m^2}$)

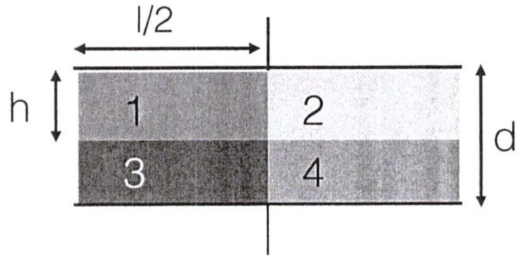


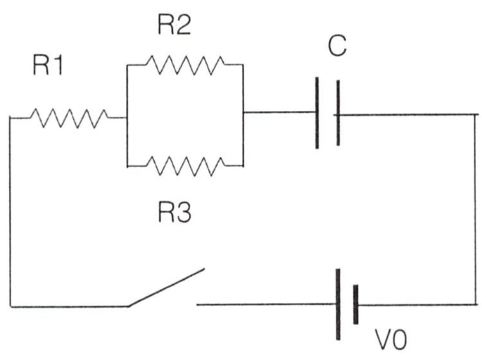
ESERCIZIO 2

In un condensatore piano a facce parallele quadrate di lato $l = 10\,\mathrm{cm}$ e distanza tra le armature $d = 4\,\mathrm{cm}$ vengono inseriti 4 dielettrici a forma di parallelepipedo con spessore $h = d/2$ e lati $a = l$, $b = l/2$ (vedi figura). Calcolare la capacità del condensatore. (5 punti)
Tale condensatore viene quindi collegato al circuito in figura. All'istante $t = 0$ il circuito viene chiuso. Calcolare:

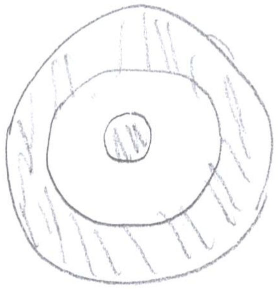
1. La d.d.p. ai capi del condensatore dopo un tempo $t = 150\,\mu\mathrm{s}$ (3 punti)
2. L'energia dissipata per effetto Joule dopo un tempo $t = 150\,\mu\mathrm{s}$ (6 punti)
3. L'energia dissipata su R_1 quando il condensatore è completamente carico (3 punti)

($\epsilon_1 = 3,\ \epsilon_2 = 2,\ \epsilon_3 = 4,\ \epsilon_4 = 3.5,\ R_1 = 1\,M\Omega,\ R_2 = 100\,M\Omega,\ R_3 = 50\,M\Omega,\ V_0 = 50\,\mathrm{V}$)





ESERCIZIO 1



$\boxed{r < R_1}$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho_1 \, dV = \frac{4\pi}{\varepsilon_0}\int_0^r k \frac{1}{r'} r'^2 \, dr' = \frac{4\pi k}{\varepsilon_0}\frac{1}{2} r^2$$

$$E = \frac{k}{2\varepsilon_0}$$

$\boxed{R_1 < r < R_2}$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{SFERA} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^{R_1} \frac{k}{\cancel{r}} r^{\cancel{2}} 4\pi \, dr =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{2} R_1^2 k \qquad E = \frac{k}{2\varepsilon_0}\frac{R_1^2}{r^2} = \frac{Q_{SFERA}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{con } Q_{SFERA} = 2\pi k R_1^2$$

$\boxed{R_2 < r < R_3}$

$$4\pi r^2 E = \int \rho \, dv = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{R_1} \rho_1 4\pi r^2 \, dr + \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r} \rho_2 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= \frac{2\pi R_1^2 k}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}\left(r^3 - R_2^3\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi r^2}\left[\frac{2\pi R_1^2 k}{\varepsilon_0} + \frac{4}{3}\pi\rho_2\frac{1}{\varepsilon_0}\left(r^3 - R_2^3\right)\right]$$

$\boxed{R > R_3}$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV = \frac{Q_{SFERA}}{\varepsilon_0} + \frac{Q_{GUSCIO}}{\varepsilon_0}$$

dove $Q_{guscio} = \rho\frac{4}{3}\pi\left(R_3^3 - R_2^3\right)$ $\qquad E = \frac{Q_S + Q_G}{4\pi r^2\varepsilon_0}$

Il potenziale vale:

$(\bar{E} \parallel \bar{r})$

$$V(0) = -\int_{\infty}^{0}\bar{E}\,d\bar{s} = -\int_{\infty}^{0}\bar{E}\cdot d\bar{r} = -\int_{\infty}^{R_3}\frac{Q_S + Q_G}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr +$$

$$-\int_{R_3}^{R_2}\left(\frac{R_1^2 k}{2\varepsilon_0 r^2} + \frac{1}{3}\rho_2\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{(r^3 - R_2^3)}{r^2}\right)dr + \int_{R_2}^{R_1}\frac{Q_S}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr +$$

$$-\int_{R_1}^{0}\frac{k}{2\varepsilon_0}dr =$$

$$= \frac{Q_S + Q_G}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} + \frac{R_1^2 k}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) - \frac{1}{3}\rho_2\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\left(R_2^2 - R_3^2\right) + R_2^3\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right]$$

$$+ \frac{Q_S}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{k}{2\varepsilon_0}R_1$$

L'e^- si muove è soggetto al campo elettrico:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_e v_{e0}^{2}}_{=0} + q_e V(d) = \frac{1}{2} m_e v_e^{2} + q_e V(R_3)$$

$$\frac{1}{2} m_e v_e^{2} = q_e \left(V(d) - V(R_3) \right)$$

<u>NB</u> $\bar{E}$ e $d\bar{s}$ sono antiparalleli!!

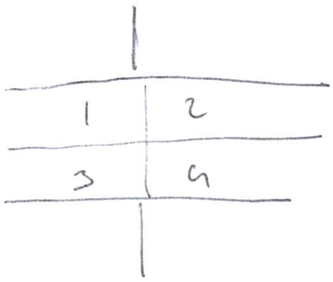
$$V(d) - V(R_3) = -\int_d^{R_3} \bar{E} \cdot d\bar{s} =$$

$$= \int_d^{R_3} \frac{Q_q + Q_s}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr = -\frac{Q_q + Q_s}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{d} \right) =$$

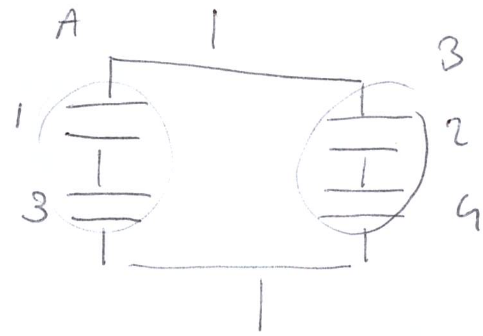
$$= \frac{Q_q + Q_s}{4\pi \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{R_3} + \frac{1}{d} \right)$$

$$v_e = \left(\frac{2}{m_e} q_e \frac{Q_q + Q_s}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{R_3} \right) \right)^{1/2}$$

ESERCIZIO 2



$\Rightarrow$



$$C_{TOT} = C_A + C_B$$

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_3 + C_1}{C_1 C_3} \Rightarrow C_A = \frac{C_1 C_3}{C_3 + C_1}$$

$$\frac{1}{C_B} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_4} = \frac{C_2 + C_4}{C_2 C_4} \Rightarrow C_B = \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4}$$

$$C_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 \frac{S/2}{d/2} = \varepsilon_1 C_0 \quad \left(\text{con } C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}\right)$$

$$C_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 S/2/d/2 = \varepsilon_2 C_0$$

$$C_3 = \varepsilon_3 C_0$$

$$C_4 = \varepsilon_4 C_0$$

$$C_T = \frac{C_0^2 (\varepsilon_1 \varepsilon_3)}{C_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)} + \frac{C_0^2 (\varepsilon_2 \varepsilon_4)}{C_0 (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)} = C_0 \left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 + \varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_4}{\varepsilon_2 + \varepsilon_4} \right)$$

$$= C_0 \left(\frac{12}{7} + \frac{7}{5,5} \right) = 2,98\, C_0 = 2,98\, \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,98 =$$

$$= 6,59 \text{ pF}$$

$$R_{TOT} = R_1 + R_{11}$$

$$R_{11}^{-1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3 + R_2}{R_2 R_3} \Rightarrow R_{11} = \frac{R_2 R_3}{R_3 + R_2}$$

$$= \frac{50 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6} = 33 \, M\Omega$$

$R_{TOT} = 34 \, M\Omega$.

$$\tau = RC = 34 \, M\Omega \cdot 6{,}59 \, pF = 224 \, \mu s$$

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 \left(1 - e^{-T/\tau}\right) =$$

$$= V_0 \left(1 - e^{-150/224}\right) = V_0 (0{,}48) = 24{,}4 \, V$$

la potenza dissipata su R_1:

$$i = \frac{V_0}{R} e^{-T/R_T C} \Rightarrow P = \frac{V_0^2}{R_T^2} R_T e^{-2T/RC}$$

$$W = \int_0^{t'} \frac{V_0^2}{R_T} e^{-2t/R_T C}$$

se il cond. è completamente carico:

$t' \to \infty$

$$W = \int \frac{V_0^2}{R_T^2} R_1 e^{-2T/R_T C}$$