Primo Esonero - 29 Maggio 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

L'urto è anelastico quindi la sola cosa che si conserva è il momento angolare rispetto ad O dove tutte le reazioni vincolari esterne danno contributo nullo. Il momento angolare totale prima dell'urto vale

$$L_i = mv_0R\,, \tag{1}$$

mentre il momento angolare totale dopo l'urto vale

$$L_f = (I_0 + mR^2)\omega \tag{2}$$

dove il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa M e raggio R vale

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2\,. \tag{3}$$

Uguagliando il momento angolare finale e iniziale troviamo

$$\omega = \frac{mv_0R}{I_0 + mR^2} = \frac{2mv_0}{(M+2m)R} = 2.68\ s^{-1}\,. \tag{4}$$

Dopo l'urto il sistema disco più sferetta comincia a ruotare con velocità ω_0. Visto che non ci sono attriti nè con il perno nè con il piano possiamo usare la conservazione dell'energia per determinare il valore minimo di v_0. Inizialmente avremo solo energia cinetica di rotazione pari a

$$E_i = \frac{1}{2}I{\omega^2}_0 \tag{5}$$

con il momento di inerzia I dato dalla somma del momento di inerzia della sferetta più quello del disco. In formule

$$I = I_0 + mR^2 = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\,. \tag{6}$$

Il valore minimo di v_0 sarà quello che corrisponde al valore minimo di ω tale da far arrestare il sistema dopo un giro di un angolo π. In questa ipotesi l'energia cinetica di rotazione dello stato finale è nulla e l'unico termine diverso da zero è l'energia potenziale gravitazionale. Il disco durante la rotazione non varia la sua energia potenziale quindi tutto si riduce alla variazione di energia potenziale della sferetta, ossia

$$E_f = mg(2R)\,. \tag{7}$$

Quindi dalla conservazione dell'energia otteniamo

$$2mgR = \frac{1}{2}I{\omega^2}_0\,, \tag{8}$$

ossia

$${\omega^{\min}}_0 = \sqrt{\frac{4mgR}{I}} = \sqrt{\frac{8mg}{(M+2m)R}}\,. \tag{9}$$

Sostituendo quindi l'espressione che lega la velocità prima dell'urto v_0 alla velocità angolare ω_0 ricaviamo

$${v^{\min}}_0 = \frac{(M+2m)R}{2m}{\omega^{\min}}_0 = \sqrt{\frac{2g(M+2m)R}{m}} = 12.1\ m/s\,. \tag{10}$$

Ricaviamo ora la velocità angolare del disco che si otterrebbe a seguito di un urto elastico con velocità iniziale $v_0^{\min}$. In questo caso risulta conservata oltre al momento angolare rispetto ad O anche l'energia meccanica. La conservazione del momento angolare si traduce nella seguente equazione

$$mv_iR = I_0\omega_e + mv_fR \tag{11}$$

dove il membro di sinistra corrisponde al momento angolare iniziale mentre il membro di destra al momento angolare finale. Inoltre v_i e v_f rappresentano la velocità iniziale e finale della sferetta. Analogamente scriviamo la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m{v^2}_i = \frac{1}{2}m{v^2}_f + \frac{1}{2}I_0{\omega^2}_e \tag{12}$$

dove il lato sinistro rappresenta l'energia meccanica nello stato iniziale e il lato destro quella finale. Riscriviamo queste due ultime equazioni rispettivamente come

$$v_i - v_f = \frac{I_0}{mR}\omega_0 \tag{13}$$

e

$$v_i - v_f = \frac{I_0}{mR}\omega_0 \tag{14}$$

e sostituiamo la prima nella seconda ottenendo

$$\frac{I_0}{mR}\omega_e\,(v_i + v_f) = \frac{I_0}{m}{\omega^2}_e\,. \tag{15}$$

Si arriva così al seguente sistema di due equazioni e due incognite

$$\begin{cases} v_i + v_f = \omega_e R \\ v_i - v_f = \frac{I_0}{mR}\omega_e\,. \end{cases} \tag{16}$$

Eliminando v_f si ricava facilmente

$$\omega_e = \frac{2v_i mR}{mR^2 + I_0} = \frac{4v_i m}{(M+2m)R}\,. \tag{17}$$

Usando la velocità ricavata nel punto 2 si ottiene numericamente

$$\omega_e = 6.48\ s^{-1}\,. \tag{18}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per prima cosa calcoliamo il numero di moli di idrogeno e di elio dall'equazione di stato dei gas ideali. Il numero di moli per entrambi i gas sarà dato da

$$n = \frac{P_0 V_0}{R T_0}\,. \tag{19}$$

La prima trasformazione che subisce l'idrogeno è isocora e dunque non viene compiuto lavoro. In seguito allo scambio di calore l'idrogeno si porterà quindi ad una temperatura T_1 data da

$$Q = nc_v\,(T_1 - T_0) = \frac{5}{2}nR\,(T_1 - T_0) \tag{20}$$

da cui otteniamo

$$T_1 = T_0 + \frac{2Q}{5nR}\,. \tag{21}$$

A questo punto, sfruttando di nuovo l'equazione di stato, ricaviamo la pressione dell'idrogeno

$$P_1 = \frac{nRT_1}{V_0} = 1.413\ \text{MPa}\,. \tag{22}$$

Ricaviamo la temperatura raggiunta dall'elio prima del malfunzionamento. Durante la trasformazione adiabatica l'elio segue la legge $PV^\gamma = \text{cost}$ con $\gamma = 5/3$. Pertanto, quando la pressione dell'elio eguaglia quella dell'idrogeno il volume si sarà ridotto a

$$V_2 = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{1/\gamma} V_0\,. \tag{23}$$

Quindi l'elio si sarà portato ad una temperatura di

$$T_2 = \frac{P_1 V_2}{nR}\,. \tag{24}$$

Se da queste temperature T_1 e T_2 di partenza l'isolamento termico viene meno i due gas raggiungeranno l'equilibrio termico ad una temperatura T_3 data da

$$\frac{5}{2}nR\left(T_1 - T_3\right) = \frac{3}{2}nR\left(T_3 - T_2\right) \, , \tag{25}$$

da cui

$$T_3 = \frac{5}{8}T_1 + \frac{3}{8}T_2 = 355 \; K \, . \tag{26}$$

La differenza di pressione tra i due gas si ottiene quindi come

$$\Delta P = nRT_3 \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_0} \right) = 2.91 \cdot 10^5 \text{ Pa} \, . \tag{27}$$

Infine la variazione di entropia per un gas ideale che varia la sua temperatura a volume costante si ottiene come

$$\Delta S = nc_v \log \frac{T_f}{T_i} \, , \tag{28}$$

quindi sfruttando il fatto che l'entropia è additiva otteniamo

$$\Delta S^{Tot} = \Delta S^{gas1} + \Delta S^{gas2} = \frac{5}{2}nR \log \frac{T_3}{T_1} + \frac{3}{2}nR \log \frac{T_3}{T_2} = 0.136 \; J/K \, . \tag{29}$$