Secondo Esonero - 26 Maggio 2015

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Affinchè il centro di massa sia in quiete, la risultante delle forze deve essere nulla. Scriviamo quindi il bilancio delle forze in un sistema di riferimento dove l'asse delle x è parallelo al piano inclinato e diretto verso la salita:

$$\begin{cases} -mg\sin\theta + T\cos\theta + f_a = 0 \\ -mg\cos\theta - T\sin\theta + N = 0 \end{cases} \tag{1}$$

A queste equazioni dobbiamo aggiungere la condizione di equilibrio statico rispetto alle rotazioni, ossia che la somma dei momenti delle forze faccia zero. Considerando l'asse di rotazione passante per il centro di massa, i soli contributi non nulli vengono da T e da f_a

$$-TR + f_a R = 0 \tag{2}$$

il che implica $T = f_a$. Unendo questa condizione alle altre due abbiamo un sistema di 3 equazioni e 3 incognite che possiamo risolvere

$$\begin{cases} -mg\sin\theta + T\cos\theta + f_a = 0 \\ -mg\cos\theta - T\sin\theta + N = 0 \\ T = f_a \end{cases} \tag{3}$$

Possiamo ricavare T sostituendo la terza eq. nella prima ottenendo:

$$T(\cos\theta + 1) = mg\sin\theta \tag{4}$$

da cui:

$$T = \frac{mg\sin\theta}{(\cos\theta + 1)} = 10.5\,N \tag{5}$$

Sostituendo T nella seconda ricaviamo N

$$N = mg\cos\theta + \frac{mg\sin^2\theta}{(\cos\theta + 1)} \tag{6}$$

$$N = mg\left[\frac{\cos^2\theta + \cos\theta + \sin^2\theta}{(\cos\theta + 1)}\right] = mg = 39.2\,N \tag{7}$$

Il coefficiente di attrito statico minimo affinchè il sistema possa essere in equilibrio sarà quindi

$$\mu_s = \frac{f_a}{N} = \frac{\sin\theta}{(\cos\theta + 1)} = 0.27 \tag{8}$$

Una volta tagliato il filo, il cilindro inizierà a rotolare di puro rotolamento, convertendo la sua energia potenziale in energia cinetica del centro di massa e in energia cinetica di rotazione. Possiamo dunque scrivere

$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2{}_c + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{9}$$

dove il momento di inerzia per un cilindro omogeneo vale:

$$I = \frac{1}{2}mR^2. \tag{10}$$

Inoltre, visto che il cilindro rotola senza strisciare, la velocità del centro di massa e la velocità angolare sono legate tra loro da $v_c = \omega R$. L'eq. precedente diventa quindi:

$$mg\Delta h = \frac{3}{4}mR^2\omega^2. \tag{11}$$

Notando che $\Delta h = h - R$ e risolvendo per ω si ottiene:

$$\omega = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{g(h-R)}{3}} = 24.7\,rad/s. \tag{12}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

La pressione p_A si ottiene semplicemente dividendo la forza peso del pistone per la sezione S del cilindro

$$p_A = \frac{mg}{S} = 0.98\,10^5\,Pa. \tag{13}$$

A questo punto il volume V_A si ricava dall'equazione di stato per un gas ideale

$$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 1.27\,10^{-3}\,m^3 \tag{14}$$

Ricaviamo inoltre $h = V_A/S$

$$h = 0.25\,m \tag{15}$$

Il gas a contatto con la sorgente a temperatura T_B si espande, comprimendo la molla che fino ad ora si trovava alla lunghezza di riposo. La pressione P_B sarà pertanto data da

$$p_B = \frac{mg + k\Delta x}{S} \tag{16}$$

mentre il volume si sarà espanso di $\Delta x S$, ossia

$$V_B = (h + \Delta x)\,S. \tag{17}$$

Imponendo per B l'equazione di stato di un gas ideale, $P_B V_B = nRT_B$, si ottiene un'equazione di secondo grado in $\Delta x S$

$$\frac{(mg + k\Delta x)}{S}\,(h + \Delta x)\,S - nRT_B = 0 \tag{18}$$

$$k\Delta x^2 + (mg + kh)\,\Delta x + mgh - nRT_B = 0 \tag{19}$$

le cui soluzioni sono

$$\Delta x = \frac{-\,(mg + kh) \pm \sqrt{(mg + kh)^2 - 4k\,(mgh - nRT_B)}}{2k} \tag{20}$$

ossia

$$\Delta x = \frac{-\,(mg + kh) \pm \sqrt{(mg - kh)^2 + 4knRT_B}}{2k} \tag{21}$$

La sola soluzione accettabile è quella positiva che vale

$$\Delta x = 0.23\,m. \tag{22}$$

Una volta ottenuto il valore di Δx, possiamo ricavare la pressione e il volume del gas nello stato B, che valgono rispettivamente:

$$p_B = 1.03\,10^5\,Pa \tag{23}$$

$$V_B = 2.42\,10^{-3}\,m^3 \tag{24}$$

Il lavoro fatto dal gas durante la sua espansione da A a B contro la forza peso e la forza elastica può essere scritto nel modo seguente

$$W = \frac{1}{2}k\Delta x^2 + mg\Delta x = 115.3\,J \tag{25}$$

Inoltre, sapendo che per il primo principio $Q = \Delta U + W$, e scrivendo la variazione di energia interna come $\Delta U = nc_v\,(T_B - T_A)$, ricaviamo il calore Q assorbito dal gas lungo la trasformazione AB

$$Q = 426\,J. \tag{26}$$

Per finire possiamo calcolare la variazione di entropia del gas durante la trasformazione AB dalla relazione

$$\Delta S^{AB} = nc_v \log\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR\log\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \tag{27}$$

ottenendo

$$\Delta S^{AB} = 0.988\,J/K \tag{28}$$