Primo Esonero - 15 Aprile 2016

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Visto che S_1 è un condutture, la carica q_1 si distribuirà sulla sua superficie. Sulla superficie interna del conduttore S_2 verra perciò indotta una carica $-q_1$. Se S_2 fosse stato scarico, sulla superficie esterna avremmo avuto carica $+q_1$ ma essendo il guscio carico di carica q_2, avremo $q_1 + q_2$. Il campo in tutti i punti dello spazio può essere ricavato da queste considerazioni, utilizzando il teorema di Gauss. Considerando delle superfici sferiche di raggio variabile avremo:
per $r < R_1$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \tag{1}$$

per $R_1 \le r \le R_2$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2} \tag{2}$$

per $R_2 < r < R_3$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 - q_1}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \tag{3}$$

per $r \ge R_3$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\rm int}}{\varepsilon_0} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 + q_2}{r^2} \tag{4}$$

In conclusione possiamo scrivere E come:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2} & R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{r^2} & r \ge R_3 \end{cases} \tag{5}$$

Occupiamoci ora del calcolo del potenziale assumendo che si annulli per $r = \infty$. Il valore del potenziale del in $r = R_3$, che come sappiamo vale -600 V e, in formule, può essere scritto nel modo seguente:

$$V(R_3) - V(\infty) = -\int_\infty^{R_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_\infty^{R_3} \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr \tag{6}$$

da cui, risolvendo l'integrale, si ottiene

$$V(R_3) = \frac{q_1 + q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = V_2. \tag{7}$$

Da questa espressione possiamo ricavare quindi il valore della carica iniziale q_2

$$q_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 V_2 - q_1 = -13\, nC. \tag{8}$$

Il potenziale resterà poi costante all'interno del conduttore S_2, e in particolare avremo

$$V(R_3) = V(R_2). \tag{9}$$

Il potenziale al centro può quindi essere scritto come

$$V(r = 0) = V(R_1) = \Delta V + V(R_2) \tag{10}$$

dove ΔV è la differenza di potenziale tra il conduttore S_1 e il conduttore S_2. Per calcolarla scriviamo

$$\Delta V = V(R_1) - V(R_2) = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_2}^{R_1} \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr. \tag{11}$$

Risolvendo l'integrale avremo

$$\Delta V = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{12}$$

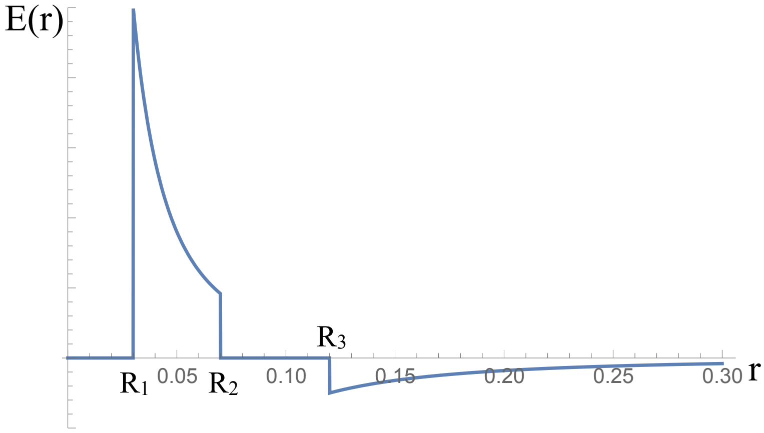
e dunque il potenziale nel centro sarà

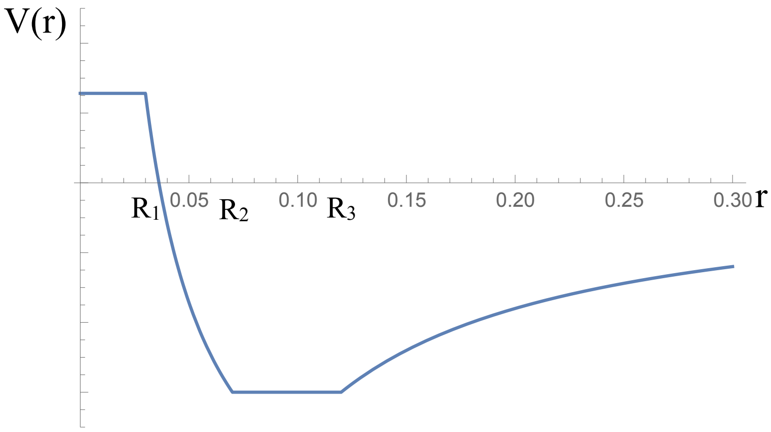
$$V(r=0) = V(R_1) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + V_2 \tag{13}$$

che numericamente vale

$$V(r=0) = 256.4\,V. \tag{14}$$

Sapendo i segni delle rispettive cariche, e sapendo che dentro i conduttori il campo elettrico deve essere nullo, possiamo disegnare l'andamento di E e V che è quello mostrato schematicamente nelle figure seguenti.





Per calcolare la velocità finale di un elettrone lasciato fermo in un punto a distanza d quando esso raggiunge un distanza R_1, possiamo sfruttare la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}m_e v^2 + q_e V(R_1) = q_e V(d) \tag{15}$$

da cui si ricava

$$v = \sqrt{\frac{2q_e}{m_e}\left(V(d) - V(R_1)\right)} = 9.4 \cdot 10^6\,m/s. \tag{16}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

La resistenza totale si ricava immediatamente dalla serie di R_1 con il parallelo di R_2 e R_3

$$R_{tot} = R_1 + \frac{R_3 R_2}{R_3 + R_2} = 7\,M\Omega. \tag{17}$$

La nuova capacità del condensatore si ricava invece dalla serie di due condensatori di area S uguale a quella del condensatore e spessore pari a d/2.

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \tag{18}$$

Le espressioni per C_1 e C_2 sono rispettivamente:

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{2S}{d} \tag{19}$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{2S}{d}. \tag{20}$$

Sostituendo si ottiene

$$C' = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{4}{3}\varepsilon_1 C \tag{21}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\epsilon_2 = 2\epsilon_1$ e abbiamo sostituito l'espressione della capacità del condensatore prima di inserire i dielettrici

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{22}$$

Il tempo in cui la carica sulle armature si riduce di un fattore $1/\boldsymbol{e}$ è detto tempo caratteristico del circuito e vale

$$\tau = R_{tot} C'. \tag{23}$$

Sostituendo l'espressione di C' abbiamo dunque

$$\frac{4}{3}\varepsilon_1 C = \frac{\tau}{R_{tot}} \tag{24}$$

da cui segue

$$\varepsilon_1 = \frac{3}{4}\frac{\tau}{C R_{tot}} = 4.3 \tag{25}$$

$$\varepsilon_2 = 8.6 \tag{26}$$

Man mano che il condensatore si scarica nel circuito fluisce una corrente la cui espressione in funzione del tempo può essere scritta nel modo seguente

$$i(t) = \frac{q_0}{R_{tot} C'} e^{-t/(R_{tot} C')} = \frac{q_0}{\tau} e^{-t/\tau}. \tag{27}$$

Per ottenere l'energia dissipata dalla resistenza R_1 dopo un tempo τ dobbiamo integrare nel tempo la potenza $R_1 i^2(t)$ tra 0 e τ

$$W_{R_1} = \int_0^\tau R_1 i^2(t) dt = \int_0^\tau R_1 \frac{q^2{}_0}{\tau^2} e^{-2t/\tau} dt = R \frac{q^2{}_0}{2\tau} \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) \tag{28}$$

Sostituendo il valore di τ e la carica iniziale $q_0 = \boldsymbol{e} \cdot 10^{-6}$ C si ottiene

$$W_{R_1} = 4\,mJ \tag{29}$$