Primo Esonero - 12 Aprile 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Affinchè il sistema si muova di moto rettilineo uniforme, la risultante delle forze su ciascuna massa deve essere zero. In particolare assegnando un verso alla fune orientato nella direzione della discesa otteniamo per il blocco di massa m_1

$$T - m_1 g = 0\,. \tag{1}$$

Per il blocco di massa m_2 conviene invece considerare la risuntante delle forze agenti scomponendole lungo la direzione parallela e perpendicolare al piano inclinato. Così facendo si ottiene

$$N + F\sin\theta - m_2 g\cos\theta = 0 \tag{2}$$

$$m_2 g\sin\theta + F\cos\theta - F_a - T = 0\,, \tag{3}$$

dove la forza d'attrito $F_a = \mu_d N$ è diretta in verso opposto alla direzione del moto. Possiamo ricavare T dalla (1) e N dalla (2) e sostituirli nella (3) ottenendo:

$$m_2 g\sin\theta + F\cos\theta - \mu_d\left(m_2 g\cos\theta - F\sin\theta\right) - m_1 g = 0 \tag{4}$$

da cui si ottiene la seguente espressione per il coefficiente di attrito dinamico

$$\mu_d = \frac{m_2 g\sin\theta + F\cos\theta - m_1 g}{m_2 g\cos\theta - F\sin\theta}\,. \tag{5}$$

Inserendo i dati del problema otteniamo quindi

$$\mu = 0.39\,. \tag{6}$$

Il lavoro fatto sulla massa m_2 dalla forza esterna vale $\vec{F}\cdot\vec{S}$ ossia

$$W_{ext} = F\overline{AB}\cos\theta = 16.89\,J. \tag{7}$$

Il lavoro fatto sulla massa m_2 dalla forza di gravità vale invece

$$W_g = m_2 gAB\cos\left(\pi/2 - \theta\right) = m_2 gAB\sin\theta = 8.83\,J. \tag{8}$$

Se ad un certo tempo $\bar{t}$ la forza esterna si annulla le nuove eq. che descrivono il bilancio delle forze diventano

$$T' - m_1 g = m_1 a \tag{9}$$

$$N - m_2 g\cos\theta = 0 \tag{10}$$

$$m_2 g\sin\theta + F_a - T' = m_2 a\,. \tag{11}$$

Si faccia in particolare attenzione al fatto che ora il blocco di massa m_2 si muove in salita e pertanto la forza d'attrito cambia segno. Con passaggi analoghi al punto 1 si ottiene

$$a = g\frac{m_2\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right) - m_1}{m_1 + m_2} \tag{12}$$

da cui si ricava T'

$$T' = m_1 g\left(1 + \frac{m_2\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right) - m_1}{m_1 + m_2}\right)\,. \tag{13}$$

In particolare quindi la variazione di tensione tra prima e dopo il tempo $\bar{t}$ vale

$$\Delta T = T - T = m_1 g\left(\frac{m_2\left(\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right) - m_1}{m_1 + m_2}\right) = -16.61\,N. \tag{14}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per trovare il valore velocità v_f alla fine della guida circolare è sufficiente applicare la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m{v_f}^2 + mgh\,. \tag{15}$$

L'altezza h alla fine della guida sarà data da

$$h = R\,(1 - \cos\alpha)\ . \tag{16}$$

Sostituendo l'espressione di h e risolvendo per v_f otteniamo

$$v_f = \sqrt{v^2 - 2gR\,(1 - \cos\alpha)}\,. \tag{17}$$

Per quanto riguarda la direzione del vettore velocità invece occorre notare che la palla uscirà dalla guida circolare in direzione tangente alla guida stessa. È facile dunque convincersi che il vettore velocità $\vec{v}_f$ sarà inclinato di un angolo α rispetto all'asse x. Le componenti del vettore saranno quindi

$$\vec{v}_f = (v_f \cos\alpha,\, v_f \sin\alpha) \tag{18}$$

e numericamente valgono

$$v_f \cos\alpha = v_f \sin\alpha = 8.55\,\mathrm{m/s}\,. \tag{19}$$

Calcoliamo ora la quota massima raggiunta dalla palla nel suo moto parabolico. Un modo semplice consiste nel considerare la conservazione dell'energia meccanica. Visto che la componente x della velocità resta invariata durante il moto la sola energia cinetica che può essere convertita in energia potenziale è quella data dalla componente y della velocit'ta. Se chiamiamo Δh la differenza di quota tra la fine della guida circolare e l'altezza massima avremo

$$\frac{1}{2}m(v_f \sin\alpha)^2 = mg\Delta h\,, \tag{20}$$

ossia

$$\Delta h = \frac{(v_f \sin\alpha)^2}{2g}\,. \tag{21}$$

La quota massima vale quindi

$$h_{\max} = h + \Delta h = R\,(1 - \cos\alpha) + \frac{(v_f \sin\alpha)^2}{2g} = 4.37\,\mathrm{m}\,. \tag{22}$$

L'eq. della traiettoria della palla sarà

$$\begin{cases} x(t) = & (v_f \cos\alpha)\,t \\ y(t) = & h + (v_f \sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{23}$$

Definendo H l'altezza del canestro, la pallina raggiungerà la quota H in un tempo $\bar{t}$ tale che

$$h + (v_f \sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2 = H \tag{24}$$

che è un'eq. di secondo grado che ammette due soluzioni

$$\bar{t} = \frac{(v_f \sin\alpha) \pm \sqrt{(v_f \sin\alpha)^2 - 2g\,(H - h)}}{g}\,. \tag{25}$$

La soluzione con il $-$ corrisponde alla palla che si muove dal basso verso l'alto, quindi va esclusa. Per fare canestro la palla deve entrare dall'alto verso il basso il che corrisponde al tempo maggiore e quindi alla soluzione con il segno $+$. La distanza del canestro si ottiene quindi come

$$x(\bar{t}) = (v_f \cos\alpha)\,\bar{t} = 11.88\,\mathrm{m}\,. \tag{26}$$