Primo Esonero - 10 Aprile 2015

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Affinchè il sistema si muova di moto rettilineo uniforme, la risultante delle forze su ciascuna massa deve essere zero

$$\begin{cases} T_2 - F_{a2} = 0 \\ T_1 - T_2 - F_{a1} = 0 \\ T_1 - mg = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Sostituendo l'espressione per la forza di attrito sui blocchi m_1 e m_2 abbiamo:

$$\begin{cases} T_2 - \mu_2 m_2 g = 0 \\ T_1 - T_2 - \mu_1 m_1 g = 0 \\ T_1 - mg = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Possiamo ricavare T_2 dalla prima eq. e T_1 dalla terza e sostituirli nella seconda ottenendo:

$$mg - \mu_2 m_2 g - \mu_1 m_1 g = 0 \tag{3}$$

da cui:

$$m = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 \tag{4}$$

Inserendo i dati del problema otteniamo quindi

$$m = 5.8\text{kg}. \tag{5}$$

Una volta ricavata m possiamo trovare T_1 e T_2

$$T_1 = mg = 56.9\text{N} \tag{6}$$

$$T_2 = \mu_2 m_2 g = 17.7\text{N} \tag{7}$$

Per trovare il lavoro totale fatto dalla forza d'attrito, possiamo sommare il lavoro fatto da F_{a1} e F_{a2} lungo il tratto d oppure, analogamente, considerare la conservazione dell'energia.

$$L^{\text{tot}}{}_a = -\mu_1 m_1 g d - \mu_2 m_2 g d = -mgd = -5.7\text{J} \tag{8}$$

Dopo che la massa m tocca terra ci sono due possibilità: la corda tra m_1 e m_2 resterà tesa o meno, a seconda di quale dei due corpi decelera di più. Se $|a_2| > |a_1|$ la corda sarà tesa e dunque il sistema sarà accoppiato e si muoverà con un'unica accelerazione. Se vice versa $|a_1| > |a_2|$ la corda non sarà tesa e dunque i due corpi si muoveranno independentemente l'uno dall'altro. In questo secondo caso la distanza tra i due si ridurrà. Le due accelerazioni valgono:

$$|a_1| = \mu_1 g \qquad |a_2| = \mu_2 g, \tag{9}$$

perciò, visto che i dati del problema prevedono $\mu_1 > \mu_2$, ci troviamo nel secondo caso e possiamo trattare in modo indipendente il moto dei due corpi. In generale il moto dei due corpi sarà uniformemente decelerato con una velocità iniziale v_0, quindi si arresterà nel tempo

$$\bar{t}: \quad v_0 - a\bar{t} = 0 \qquad \text{ossia} \quad \bar{t} = \frac{v_0}{a} \tag{10}$$

e in quel tempo lo spazio percorso sarà:

$$S = v_0 \bar{t} - \frac{1}{2} a \bar{t}^2 = \frac{v^2{}_0}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{a} = \frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{a}. \tag{11}$$

Per m_1 e m_2 avremo rispettivamente:

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{\mu_1 g} = 10.2\text{cm} \tag{12}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\frac{v^2{}_0}{\mu_2 g} = 17.0\text{cm} \tag{13}$$

Quindi lo spazio tra loro si sarà ridotto di

$$\mathrm{S}_2 - S_1 = \frac{v^2{}_0}{2g}\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right) = 6.8\text{cm}. \tag{14}$$

Allo stesso risultato si può giungere uguagliando l'energia cinetica iniziale di cialscun blocco al lavoro della forza d'attrito lungo il tratto necessario a farlo fermare.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per trovare il valore della massa è sufficiente applicare la conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2}kx^2{}_0 = mgh + \mu mg\cos\theta l \tag{15}$$

Si noti inoltre la relazione tra l ed h

$$h = l\sin\theta \tag{16}$$

Sostituendo otteniamo

$$\frac{1}{2}kx^2{}_0 = mgh + \mu mgh\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = mgh\left(1 + \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \tag{17}$$

da cui è possibile ricavare m

$$m = \frac{kx^2{}_0}{2gh\left(1 + \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)} = 0.15\text{kg} \tag{18}$$

Per il secondo punto applichiamo nuovamente la conservazione dell'energia, ricordando che ora la massa è cambiata e che l'energia cinetica nello stato finale è diversa da zero. Avremo quindi

$$\frac{1}{2}kx^2{}_0 = m'gh + \mu m'g\cos\theta l + \frac{1}{2}m'{v_0}^2 \tag{19}$$

da cui è possibile ricavare v_0

$${v_0}^2 = \frac{kx^2{}_0}{m} - 2gh\left(1 + \mu\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) \tag{20}$$

che vale

$$v_0 = 2.6\text{m/s} \tag{21}$$

Una volta che la pallina si stacca dal piano inclinato seguirà una traiettoria parabolica dove le componenti della velocità iniziale dipendono dall'angolo del piano inclinato

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\theta \\ v_{0y} = v_0\sin\theta \end{cases} \tag{22}$$

L'eq. della traiettoria sarà quindi:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{23}$$

La pallina toccherà terra in un tempo $\bar{t}$ tale che

$$h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \tag{24}$$

che è un'eq. di secondo grado che ammette due soluzioni

$$\bar{t} = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{(v_{0y})^2 + 2gh}}{g} \tag{25}$$

di cui solo quella con il + è fisica. La distanza d a cui tocca terra quindi sarà

$$d = v_{0x}\bar{t} = 1.01\text{m}. \tag{26}$$