Secondo Esonero - 10 Gennaio 2018

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

La corrente complessiva I che attraversa il cilindro conduttore sarà legata all'intergrale della densità di corrente esteso su tutta la sezione

$$I = \int \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n} dS \,. \tag{1}$$

Visto che la densità di corrente è perpendicolare alla sezione del cilindro il prodotto $\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n}$ equivale semplicemente al modulo di $\overrightarrow{j}$. Sostituendo l'espressione esplicita della densità di corrente in funzione di r e dell'elementino di superficie dS, si ottiene

$$I = \int_0^R \alpha r 2\pi r dr = 2\pi\alpha \frac{R^3}{3} \,, \tag{2}$$

che può essere invertita per ricavare α

$$\alpha = \frac{3I}{2\pi R^3} = 6.51 \cdot 10^6 \text{ A/m}^3 \,. \tag{3}$$

Scriviamo ora l'espressione esplicita del campo B generato dalla corrente che scorre nel cilindro facendo uso della legge di Ampere. Dovremmo quindi calcolare

$$\oint \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \mu_0 \int \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{n} dS \tag{4}$$

dove la circuitazione è presa su circonferenze di raggio r centrate sull'asse del cilindro e giacenti nel piano xy mentre l'integrale di destra va svolto sui cerchi che hanno come bordo le suddette circonferenze. Consideriamo prima la regione $r \leq R$

$$2\pi r B = \mu_0 \int_0^r 2\pi\alpha r^2 dr = \mu_0 2\pi\alpha \frac{r^3}{3} \,, \tag{5}$$

da cui si ottiene il campo B, che sarà tangente alla circonferenza di raggio r e in modulo pari a

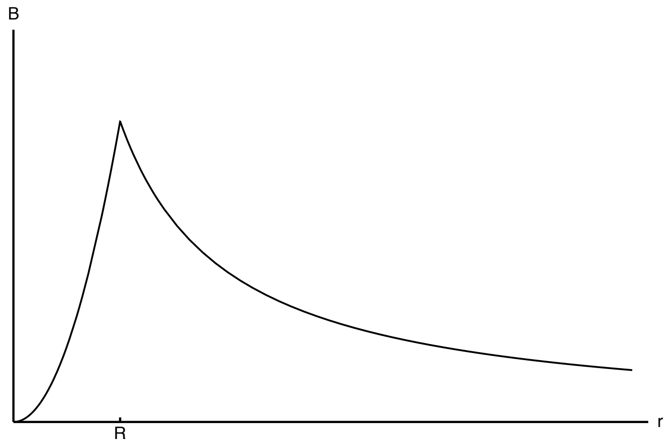
$$B = \mu_0 \frac{\alpha r^2}{3} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{r^2}{R^3} \,. \tag{6}$$

Per $r > R$ avremo invece

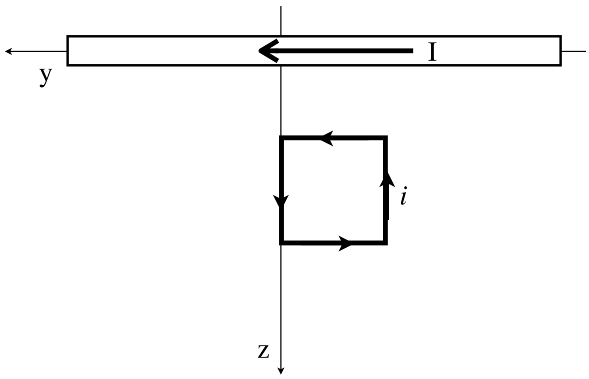
$$2\pi r B = \mu_0 \int_0^R 2\pi\alpha r^2 dr = \mu_0 2\pi\alpha \frac{R^3}{3} \tag{7}$$

$$B = \mu_0 \frac{\alpha R^3}{3r} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \tag{8}$$

L'andamento di E è quello mostrato schematicamente nella figura seguente.



Ciascun lato della spira quadrata percorsa dalla corrente i subirà una forza a causa del campo magnetico generato dal cilindro secondo la legge $d\overrightarrow{F} = id\overrightarrow{\ell} \times \overrightarrow{B}$. Sui due lati orientati come l'asse z le forze agenti saranno uguali e opposte non producendo quindi alcun effetto complessivo. Sui lati orientati come l'asse y non ci sarà la stessa cancellazione perchè il campo B sul lato superiore sarà più intenso che sul lato inferiore. Visto che la spira sarà anche soggetta alla forza di gravità, per mantenersi in equilibrio senza cadere la corrente dovrà circolare come in figura.



Dalla regola della mano destra si ricava quindi che la forza agente sul lato superiore, F_1, punta verso l'alto mentre quella sul lato inferiore, F_2 punta verso il basso. Per avere la risultante nulla dovrà essere

$$F_1 - F_2 = mg \tag{9}$$

dove

$$F_1 = iB(d)\ell = \mu_0 \frac{\alpha R^3}{3d} \tag{10}$$

e

$$F_2 = iB(d+\ell)\ell = \mu_0 \frac{\alpha R^3}{3(d+\ell)}\,. \tag{11}$$

Sostituendo e risolvendo per i si ottiene quindi

$$i = \frac{3mgd(d+\ell)}{\mu_0 \alpha R^3 \ell^2} = 16.3\ \mathrm{A}\,. \tag{12}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Conviene scomporre il calcolo del flusso in varie regioni. Cominciamo calcolando il flusso per $0 < x < l/2$. In questa fase il primo lato della spira sta spazzando la regione di campo magnetico. Avremo perciò

$$\phi(B) = \int_0^x \vec{B} \cdot \vec{n} dS \,. \tag{13}$$

Sfruttiamo il fatto che $\vec{B}$ e $\vec{n}$ sono paralleli, sostituiamo l'espressione di B e scriviamo il dS come ldx.

$$\phi(B) = \int_0^x B l dx = \int_0^x k x l dx = \frac{1}{2} k l x^2 \,. \tag{14}$$

Tra $l/2$ ed l la spira contiene al suo interno sempre tutta la regione di campo magnetico e dunque il flusso resta costante e vale

$$\phi(B) = \frac{1}{8} k l l^2 \,. \tag{15}$$

Per $l < x < 3/2\, l$ il flusso decresce e gli estremi di integrazione diventano

$$\phi(B) = \int_{x-l}^{l/2} B l dx = \int_{x-l}^{l/2} k x l dx = \frac{1}{8} k l \left(-3l^2 - 4x^2 + 8lx\right) \,. \tag{16}$$

Infine per $l > 3/2\, l$ la spira è fuori dalla regione di campo magnetico e il flusso è nullo.
La forza elettromotrice indotta si può quindi scrivere come

$$\text{f.e.m.} = -\frac{\mathrm{d}\phi(\mathrm{B})}{\mathrm{dt}} \tag{17}$$

dove la variazione di flusso nel tempo, per $0 < x < l/2$, vale

$$-\frac{d\phi(B)}{dt} = -klvx \,. \tag{18}$$

La corrente indotta dunque circolerà in senso orario e varrà in modulo

$$i(x) = \frac{f.e.m.}{R} = \frac{klvx}{R} \,. \tag{19}$$

In particolare, usando che $i(x = l/2) = i_m$, possiamo ricavare la resistenza R

$$R = \frac{l^2 k v}{2 i_m} = 7.5 \text{ m}\Omega \,. \tag{20}$$

Occupiamoci ora della forza che il campo B esercita sulla spira. Sui lati orizzontali agiranno forze uguali e opposte la cui risultante sarà complessivamente nulla. La forza agente sul lato verticale che attraversa la regione di campo magnetico sarà invece pari a

$$\vec{F}(x) = -i(x) B(x) l \hat{x} = -\frac{k^2 l^2 v x^2}{R} \hat{x} \,. \tag{21}$$

Dunque per far muovere la spira con velocità costante occorrerà applicare ad essa una forza variabile uguale e opposta a $\vec{F}(x)$, ossia

$$\vec{F}^{\text{ext}}(x) = \frac{k^2 l^2 v x^2}{R} \hat{x} \,. \tag{22}$$

Il lavoro complessivo si ootiene integrando questa forza

$$W = \int_0^{l/2} F^{\text{ext}}(x) dx = \frac{k^2 l^5 v}{24 R} = 25 \text{ mJ} \,. \tag{23}$$