Secondo Esonero - 1 Giugno 2016

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Dal teorema della circuitazione di Ampere abbiamo

$$C = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tot} \tag{1}$$

perciò la corrente totale che circola nel filo può essere ricavata semplicemente come

$$I_{tot} = \frac{C}{\mu_0} = 23.1\,A. \tag{2}$$

Inoltre la corrente totale può essere scritta come l'integrale di J su tutta la sezione del filo

$$I_{tot} = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_{R_1}^{R_2} \frac{k}{r^2} 2\pi r dr \tag{3}$$

il che svolgendo l'integrale

$$\frac{C}{\mu_0} = 2\pi k \log \frac{R_2}{R_1} \tag{4}$$

ci permette di ricavare il parametro k incognito

$$k = \frac{C}{2\pi\mu_0 \log(R_2/R_1)} = 5.3\,A \tag{5}$$

A questo punto, noto l'andamento della densità di corrente, possimo facilmente ricavare l'andamento del campo B in tutto lo spazio. Utilizzando nuovamente la legge di Ampere e considerando la circuitazione su circonferenze centrate nell'asse del filo e giacenti su un piano ad esso ortogonale otteniamo rispettivamente:
per $r < R_1$

$$B = 0 \tag{6}$$

non essendovi correnti concatenate;
per $R_1 \leq r \leq R_2$

$$2\pi r B = 2\pi k \mu_0 \int_{R_1}^{r} \frac{dr}{r} \tag{7}$$

da cui

$$B(r) = \frac{k\mu_0}{r} \log \frac{r}{R_1} \tag{8}$$

per $r \geq R_2$

$$B = \frac{\mu_0 I_{tot}}{2\pi r} \tag{9}$$

In conclusione il campo può essere dunque scritto come

$$B = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{C}{2\pi \log(R_2/R_1)} \frac{1}{r} \log \frac{r}{R_1} & R_1 < r < R_2 \\ \frac{C}{2\pi r} & r > R_2 \end{cases} \tag{10}$$

Un elettrone posto a distanza d con la velocità mostrata in figura subirà una forza di Lorentz pari a

$$F = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{11}$$

dove l'unica componente di $\vec{v}$ che conta sarà la componente y. Sostituendo l'epressione del campo in d si ottiene quindi

$$a = \frac{q}{m} v_y B(d) = -\frac{qC}{2\pi md} v_y = -1.87 \cdot 10^{12} m/s^2 \tag{12}$$

diretta nel verso delle x negative.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Il flusso cercato si ottiene integrando l'espressione di B in dS con gli estremi di integrazione che dipendono dalla coordinata del centro della spira

$$\Phi = \int_{z_c - l/2}^{z_c + l/2} B(z) l dz = B_0 \int_{z_c - l/2}^{z_c + l/2} z dz = B_0 l z_c. \tag{13}$$

A questo punto possiamo applicare la legge di Faraday-Neumann-Lenz per ottenere l'esressione della corrente che circola nella spira a partire dal sua f.e.m. indotta

$$i = \frac{f.e.m.}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{B_0 l}{R}\frac{dz_c}{dt} = \frac{B_0 l}{R} v_z. \tag{14}$$

Notiamo inoltre che man mano che la spira cade il campo B decresce in intensità e il flusso concatenato con la spira decresce. Per questo motivo la corrente circola nella spira della figura in senso antiorario.
Essendo la spira percorsa da corrente i suoi lati subiranno un forza dovuta al campo magnetico. In particolare, il due lati paralleli all'asse z subiranno forze uguali in modulo e opposte in segno che daranno dunque contributo nullo alla risultante. Sul lato superiore della spira il campo B è costante e pertanto la forza risultante, diretta lungo z, sarà data da:

$$F_S = ilB(z = z_c + l/2) = -\frac{{B^2}_0 l}{R} v_z \left(z_c + l/2\right) \tag{15}$$

Analogamente per il lato inferiore si ottiene

$$F_G = -ilB(z = z_c - l/2) = \frac{{B^2}_0 l}{R} v_z \left(z_c - l/2\right). \tag{16}$$

La risultante delle forze agenti sulla spira sarà dunque

$$F_{tot} = F_S + F_G = -\frac{{B^2}_0 l^2}{R} v_z \tag{17}$$

che essendo v_z negativa è diretta verso l'alto e si oppone alla forza peso.
La legge di Newton ci dice quindi che

$$ma = -mg + F_{tot} \tag{18}$$

ossia

$$a = -g - \frac{{B^2}_0 l^2}{mR} v_z \tag{19}$$

che corrisponde ad una equazione differenziale in v_z nella forma seguente

$$\frac{dv_z}{dt} = -\left(g + \frac{v}{A}\right) \tag{20}$$

in cui abbiamo posto

$$A = \frac{mR}{{B^2}_0 l^2}. \tag{21}$$

L'equazione differenziale può essere risolta per separazione delle variabili e imponendo la condizione iniziale $v_z(t = 0) = 0$ si ottiene la soluzione

$$v_z(t) = Ag\left(e^{-t/A} - 1\right). \tag{22}$$

Sostituendo $t = 1\,\mathrm{s}$ si ottiene per la velocità

$$v_z(t = 1\,s) = -7.98\,m/s \tag{23}$$