Primo Esonero - 6 Novembre 2017

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

Inizialmente tutta la carica q_0 sarà uniformemente distribuita sulla superficie esterna del guscio. In questo modo qualsiasi superficie sferica di raggio minore di R_3 contiene carica nulla il che garantisce, per il teorema di Gauss, che il campo dentro il conduttore si nullo. Quando inserisco il secondo conduttore con carica q_0, anch'essa disposta sulla sua superficie ($r = R_1$), la carica nel guscio sferico si dispone nel modo seguente:

- sulla superficie interna ($r = R_2$) viene a trovarsi una carica $-q_0$ in modo che qualsiasi superficie sferica di raggio compreso tra R_2 e R_3 contenga carica nulla il che garantisce, per il teorema di Gauss, che il campo dentro il conduttore si nullo.
- sulla superficie esterna ($r = R_3$) viene a trovarsi una carica $2q_0$ in modo che la carica complessiva sul guscio sferico sia q_0.

A questo punto si ricavano facilmente le 3 densità superficiali come

$$\begin{aligned} \sigma_{R_1} &= \ \ q_0 \ \ / \left(4\pi R_1^2\right) = 1.87 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2} \\ \sigma_{R_2} &= -q_0 \ / \left(4\pi R_2^2\right) = -2.36 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2} \\ \sigma_{R_3} &= \ 2q_0 \ / \left(4\pi R_3^2\right) = 3.16 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C/m^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Il campo in tutti i punti dello spazio può essere ricavato da queste considerazioni, utilizzando il teorema di Gauss. Considerando delle superfici sferiche di raggio variabile avremo:
per $r < R_1$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \tag{2}$$

per $R_1 \leq r \leq R_2$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2} \tag{3}$$

per $R_2 < r < R_3$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{q_0 - q_0}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0 \tag{4}$$

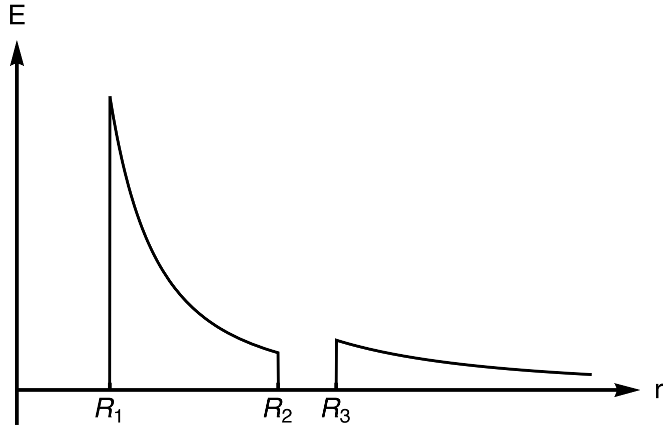
per $r \geq R_3$

$$E 4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{2q_0}{\varepsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q_0}{r^2} \tag{5}$$

In conclusione possiamo scrivere E come:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & R_2 < r < R_3 \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q_0}{r^2} & r \geq R_3 \end{cases} \tag{6}$$

L'andamento di E è quello mostrato schematicamente nella figura seguente.



Occupiamoci ora del calcolo del potenziale assumendo che si annulli per $r = \infty$. Il valore del potenziale del in $r = R_1/2$ è uguale al potenziale per $r = R_1$ e, in formule, può essere scritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} V(R_1/2) &= V(R_1) = V(R_1) - V(\infty) = -\int_\infty^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} \\ &= -\int_\infty^{R_3} Edr - \cancel{\int_{R_3}^{R_2} Edr} - \int_{R_2}^{R_1} Edr = \\ &= \frac{2q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{R_3}\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\left(-\frac{1}{r^2}\right)dr \end{aligned} \tag{7}$$

da cui, risolvendo l'integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} V(R_1/2) &= \frac{2q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} + \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \\ &= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{R_3} + \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2R_1R_2 - R_1R_3 + R_2R_3}{R_1R_2R_3} = 4134.8\,\mathrm{V}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Una volta che i due conduttori vengono collegati dal filo diventano un conduttore unico e la carica complessiva, che è pari a $2q_0$, si distribuisce sulla superficie esterna ($r = R_3$). L'energia dissipata nel processo si può calcolare come differenza tra l'energia elettrostatica U prima e dopo aver collegato i due conduttori.

$$U = \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau \tag{9}$$

Notiamo però che il campo non varia tra prima e dopo per $r > R_3$ e che, dopo aver collegato il filo, è nullo per $r < R_3$. Pertanto l'energia dissipata sarà proprio pari a

$$\begin{aligned} E_{dis} &= \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{{q^2}_0}{(4\pi\varepsilon_0)^{\cancel{2}}}\frac{1}{r^4}\cancel{(4\pi)}r^2dr = \\ &= \frac{{q^2}_0}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = -\frac{{q^2}_0}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{{q^2}_0}{8\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1R_2} = 6.5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Calcoliamo per prima cosa la capacità di un condensatore cilindrico riempito di dielettrico. Questa può essere scritta nel modo seguente:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\log\frac{r_2}{r_1}}\,, \tag{11}$$

e, sostituendo i dati del problema, vale

$$C = 54.8\,\mathrm{nF}\,. \tag{12}$$

Quando il condensatore viene collegato al circuito inizia a caricarsi. Per sapere quanta carica si sarà accumulata dopo 2 secondi sulle armature bisognerà risolvere l'equazione differenziale del circuito per scoprire come varia la carica in funzione del tempo. Per farlo iniziamo imponendo che la differenza di potenziale del generatore sia uguale alla caduta di potenziale attraverso la resistenza più la differenza di potenziale ai capi del condensatore. In formule:

$$\mathscr{E} = V_R + V_C = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}\,. \tag{13}$$

Ricordiamo inoltre che la carica depositata sulle armature in funzione del tempo e la corrente che attraversa il circuito sono legate dalla seguente relazione:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}\,. \tag{14}$$

Sostituendo l'espressione di i si ottiene una semplice equazione differenziale che può essere risolta per separazione delle variabili:

$$R\frac{dq}{dt} = \mathscr{E} - \frac{q}{C} \tag{15}$$

$$\frac{dq}{q - C\mathscr{E}} = -\frac{1}{RC}dt \tag{16}$$

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathscr{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt\,. \tag{17}$$

Svolgendo gli integrali e esponenziando l'equazione risultante otteniamo:

$$q = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\,. \tag{18}$$

La carica presente sulle armature dopo 2 secondi, $\bar{q}$, sarà allora data da:

$$\bar{q} = q\,(t = 2s) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-2/\tau}\right) = 3.41\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}\,. \tag{19}$$

Sfruttando il teorema di Gauss con superfici cilindriche possiamo ricavare il campo elettrico a metà tra le armature che risulta essere

$$E\,(t = 2s, r = 3r_1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{2\bar{q}}{l\,(r_1 + r_2)} = 1242.8\,\mathrm{V/m}\,. \tag{20}$$

Il condensatore viene poi fatto caricare completamente e separato dal circuito. Il lavoro necessario ad estrarre il dielettrico dalle armature del condensatore sarà dato dalla differenza tra l'energia del condensatore prima e dopo averlo estratto. Prima dell'estrazione, l'energia elettrostatica del condensatore vale

$$U_{in} = \frac{q^2{}_{fin}}{2C} \tag{21}$$

dove q_{fin} è la carica finale depositata sulle armature una volta completato il processo di carica. Questa carica è proprio quella che fa sì che la differenza di potenziale ai capi di C sia pari a $\mathscr{E}$ e pertanto vale

$$q_{fin} = C\mathscr{E}\,. \tag{22}$$

Dopo l'estrazione del cristallo dielettrico la carica sulle armature resterà invariata e pari a q_{fin}, mentre sarà cambiata la capacità. In particolare avremo

$$C' = \frac{C}{\epsilon_r}\,. \tag{23}$$

L'energia finale sarà quindi

$$U_{in} = \frac{q^2{}_{fin}}{2C} \tag{24}$$

Il lavoro per estrarlo sarà quindi dato da

$$\begin{aligned} U_{fin} - U_{in} &= \frac{q^2{}_{fin}}{2} \left(\frac{\varepsilon_r}{C} - \frac{1}{C} \right) = \frac{q^2{}_{fin}}{2C} \left(\varepsilon_r - 1 \right) \qquad (25) \\ &= \frac{C\mathscr{E}^2}{2} \left(\varepsilon_r - 1 \right) = 6.0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{J}\,. \qquad (26) \end{aligned}$$