CIRCUITO RLC

Abbiamo già incontrato due esempi di circuiti con correnti variabili nel tempo

- CIRCUITO RC
- CIRCUITO RL

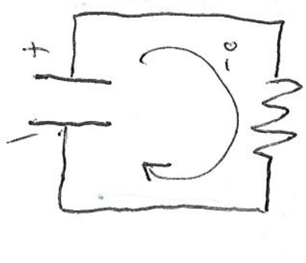
Nel caso di un circuito RC, quando le armature di un condensatore carico vengono collegate attraverso una resistenza, si genera una corrente da + a - che scarica il condensatore

per $t=0$ la ddp ai capi di C vale V_0

per t generico ddp ai capi di C = ddp ai capi di R

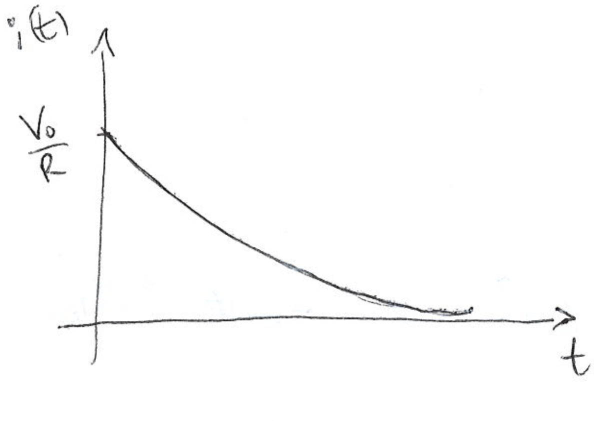
$\Rightarrow$

$$V_c = \frac{q}{C} = Ri \qquad i = -\frac{dq}{dt}$$



derivando rispetto al tempo

$$\frac{di}{dt} = -\frac{i}{RC} \Rightarrow i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad \text{con } \tau = RC$$

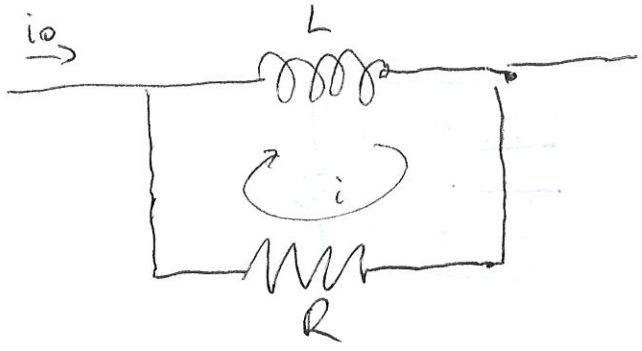


L'energia elettrica $E = \frac{1}{2} C V_0^2$ inizialmente immagazzinata nel condensatore viene interamente dissipata per effetto Joule fino a che la corrente non va a zero

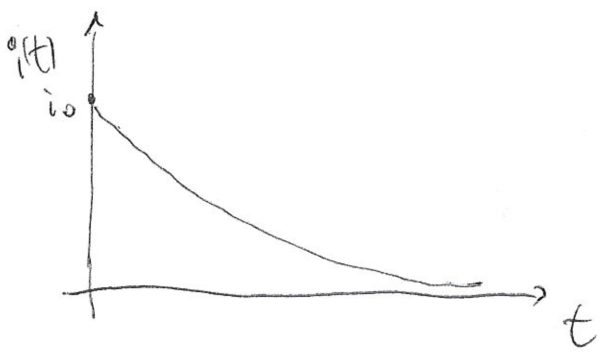
Nel caso di un circuito RL, quando un induttore percorso da una corrente i_0 viene chiuso su una resistenza, abbiamo

$$\mathcal{E}_i = -L \frac{di}{dt} = Ri$$

$$\Rightarrow \quad i(t) = i_0 \, e^{-t/\tau} \qquad \text{con} \quad \tau = \frac{L}{R}$$



onde in questo caso la corrente decresce nel tempo



L'energia magnetica vale $E = \frac{1}{2} L i^2$ e viene tutta dissipata per effetto Joule

In entrambi i casi per i circuiti valevo l'eq differenziale lineare della forma

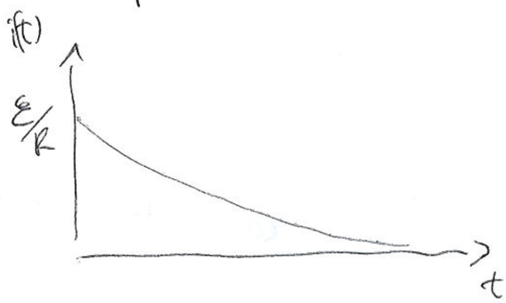
$$\frac{di}{dt} = -ki \qquad i(t) = A e^{-kt}$$

con A determinato dalle condizioni iniziali e la costante di tempo data da

$$k = \frac{1}{\tau} \begin{cases} \tau = RC \\ \tau = L/R \end{cases}$$

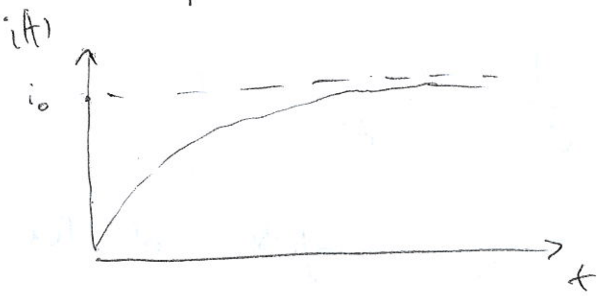
Se invece dei processi di scarica consideriamo i <u>processi di carica</u>, inserendo un generatore nel circuito otteniamo

per RC



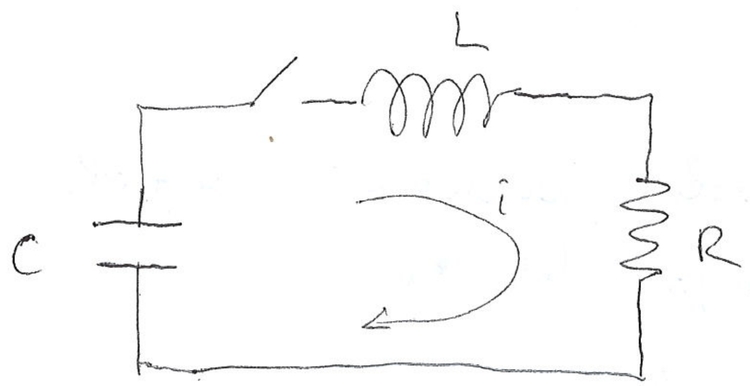
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$

per RL



$$i(t) = i_0 \left(1 - e^{-\frac{tR}{L}}\right)$$

Consideriamo ora un circuito <u>RLC</u> come in figura



C è inizialmente carico

a $t=0$ chiudo il circuito e inizia a circolare corrente e nell'induttore si genera una
<u>fem autoindotta</u>

la ddp ai capi di R non è più $\frac{q}{C}$ ma vale

$$\frac{q}{C} - L\frac{di}{dt} = Ri$$

derivo tutto rispetto al tempo e sostituisco $\frac{dq}{dt} = -i$

$$\boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$$

eq differenziale del second'ordine

definiamo

$$\gamma = \frac{R}{2L} \rightarrow \text{SMORZAMENTO}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \text{PULSAZIONE PROPRIA}$$

Ottengo quindi

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\gamma \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

Si tratta della stessa eq che regola l'oscillatore armonico smorzato per attrito viscoso

La soluzione generale è

$$i(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

α_1 e α_2 sono le radici di

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad \text{eq caratteristica}$$

ossia

$$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Si distinguono 3 casi:

- $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow R^2 > \frac{4L}{C}$ SMORZAMENTO FORTE

$$i(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + B e^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)$$

- $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow R^2 = \frac{4L}{C}$ SMORZAMENTO CRITICO

$$i(t) = e^{-\gamma t}(A + Bt)$$

- $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow R^2 < \frac{4L}{C}$ SMORZAMENTO DEBOLE

$$i(t) = D e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

A, B, D, ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali

$R_c = 2\sqrt{L/C}$ è detta resistenza critica

Una situazione limite (ideale) si ha per $R = 0 \rightarrow$ circuito LC

$$\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} \rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$ oscillatore armonico

che ha come soluzione

$$i(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{con } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

la ddp ai capi di C è uguale e opposta alla fem indotta

$$V_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega L A \cos(\omega t + \phi)$$

A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali

- es. condensatore carico collegato a un'induttanza

$$i(0) = 0, \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{V_0}{L}$$

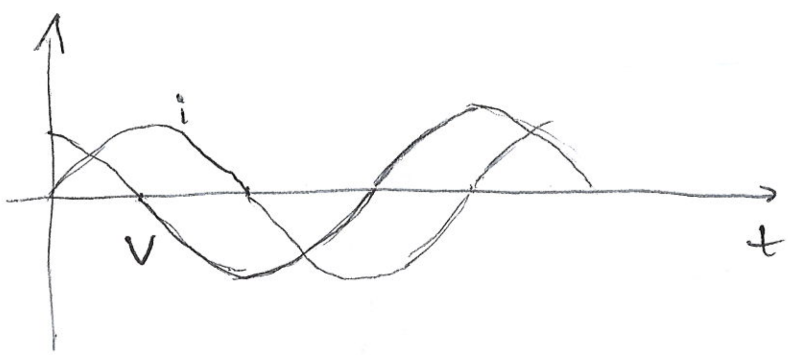
$$\hookrightarrow \quad i = \frac{V_0}{\omega L} \operatorname{sen} \omega t \qquad V_c = V_0 \cos \omega t$$

- es induttanza percorsa da corrente collegata ad un condensatore scarico

$$i(0) = i_0, \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

$$\hookrightarrow \quad i = i_0 \cos \omega t \qquad V_c = -\omega L i_0 \operatorname{sen} \omega t$$

N.B. vale sempre che $i = i_{max}$ quando $V_c = 0$



L'energia si trasforma alternativamente da energia elettrica a energia magnetica il bilancio energetico per t generico è

$$\frac{1}{2} C V_c^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} L i_0^2$$

è detto <u>circuito oscillante</u>

formalmente è del tutto analogo alle eq. che regolano il movimento di una massa m collegata ad una molla con forza elastica $-kx$

Questa <u>corrispondenza formale</u> può essere estesa anche al caso con la resistenza R

$$q \longleftrightarrow x$$

$$i = \frac{dq}{dt} \longleftrightarrow v = \frac{dx}{dt}$$

$$L \longleftrightarrow m$$

$$C \longleftrightarrow \frac{1}{k}$$

$$R \longleftrightarrow \lambda$$

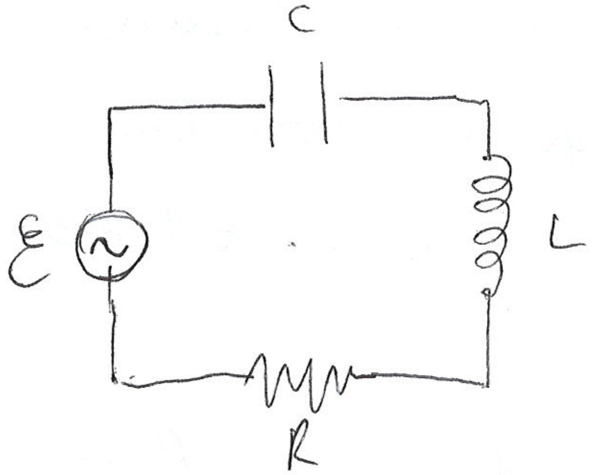
↳ attrito viscoso $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$

OSCILLAZIONI PERMANENTI

Per mantenere un'oscillazione elettrica in un circuito reale serve un generatore esterno che fornisca la potenza dissipata dal resistore.

Colleghiamo quindi al circuito un generatore che eroghi una fem secondo la legge

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$$



otteniamo

$$\underbrace{V_0 \cos(\omega t + \phi) - L\frac{di}{dt}}_{fem} = \underbrace{\frac{q}{C} + Ri}_{ddp}$$

derivo tutto rispetto al tempo e pongo $i = \frac{dq}{dt}$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = -\frac{\omega V_0}{L} \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

La soluzione sarà data dalla somma della soluzione generale dell'omogenea associata

$$i(t) = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t} \qquad (*)$$

e di una soluzione particolare del tipo

$$i(t) = i_0 \cos\omega t$$

La soluzione (*) rappresenta il fenomeno transitorio che scompare dopo un certo tempo.
A regime avremo solo la soluzione particolare oscillante

Sostituisco la soluzione particolare nell'eq

$$-\omega^2 i_0 \cos\omega t - \frac{R}{L}\omega i_0 \operatorname{sen}\omega t + \frac{i_0}{LC}\cos\omega t =$$

$$= -\frac{\omega\mathcal{E}}{L}\left[\operatorname{sen}\omega t\cos\phi + \cos\omega t \operatorname{sen}\phi\right]$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{R}{L}\omega i_0 \operatorname{sen}\omega t + i_0\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)\cos\omega t = -\frac{\omega\mathcal{E}}{L}\cos\phi \operatorname{sen}\omega t +$$

$$-\frac{\omega\mathcal{E}}{L}\operatorname{sen}\phi\cos\omega t$$

deve essere vero $\forall t$

$\Rightarrow$ uguagliando i coeff di $\operatorname{sen}\omega t$ e $\cos\omega t$ ottengo

$$\boxed{tg\,\phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Abbiamo quindi ricavato che se applico all'RLC una fem variabile della forma $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \phi)$ ottengo un'oscillazione elettrica permanente

ossia una corrente $i(t) = i_0 \cos\omega t$

con:

- la stessa ω della fem forzante
- ampiezza dipendente dai parametri del circuito
- sfasata rispetto alla fem di una fase ϕ dipendente dai parametri del circuito

RISONANZA

La corrente del RLC è massima se ω della fem coincide con la pulsazione propria del circuito

In quel caso $\phi = 0$

Questo fenomeno è detto risonanza

Avremo:

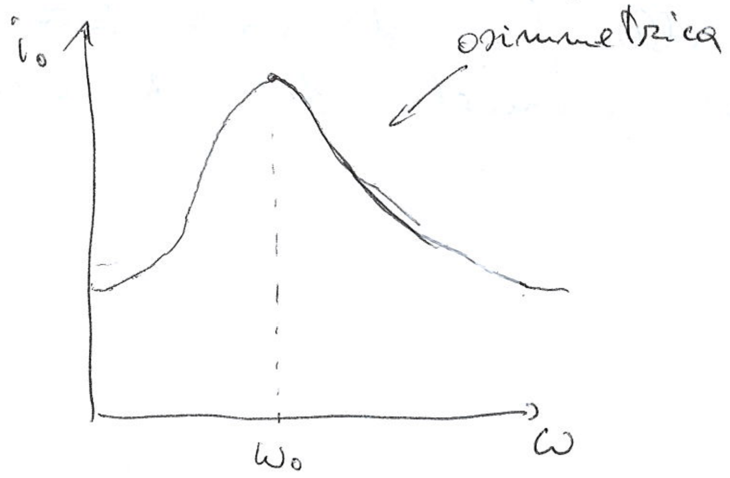
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \longrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow \phi = 0$$

$$i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$i(t) = i_0 \cos \omega t = \frac{\mathcal{E}(t)}{R}$$

L'andamento di i_0 in funzione di ω è



Definisco $\omega_1 < \omega_0$ e $\omega_2 > \omega_0$ tale che

$$i_0(\omega_1) = i_0(\omega_2) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2} R}$$

Definisco larghezza della risonanza la quantità

$\omega_2 - \omega_1$

Per ricavare ω_2 e ω_1 devo imporre

$$\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}R} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

ossia $$R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

risolvo (scartando le soluzioni negative) e ottengo

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \qquad \omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \overset{\text{def}}{=} \frac{\omega_0}{Q}$$

dove $$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

è detto fattore di merito

tanto maggiore è Q tanto più la risonanza è stretta