$\mu_r$ = PERMEABILITÀ MAGNETICA RELATIVA DEL MEZZO

$\chi_m$ = SUSCETTIVITÀ MAGNETICA

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m} \qquad \boxed{\chi_m = \mu_r - 1}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} - \vec{M}$$

dove $\vec{M}$ è la magnetizzazione

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{H} \qquad \vec{M} = \vec{B} \, \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0}$$

| | $\chi_m$ | $\mu_r$ | $\chi_m, \mu_r$ | $\vec{M}, \vec{H}$ | $B, B_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| DIAMAGNETICA | $<0$ | $<1$ | costanti | $\vec{M}$ opposto ad $H$ | $B < B_0$ |
| PARAMAGNETICA | $>0$ | $>1$ | costanti | $\vec{M}$ concorde ad $\vec{H}$ | $B > B_0$ |
| FERROMAGNETICA | $\gg 0$ | $\gg 1$ | funzione di H | $\vec{M}$ concorde ad $\vec{H}$ * | $B \gg B_0$ |

ESERCIZIO

Una bobina formata da 200 spire è avvolta attorno a un anello di materiale ferromagnetico di permeabilità $\mu_r = 8 \cdot 10^3$ e di raggio $R = 25$ cm. Trovare la corrente che deve passare nella bobina per avere una magnetizzazione $M = 3.5 \; 10^5$ A/m

La magnetizzazione è collegata a B

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu H$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M$$

$$M = (\mu_r - 1) H$$

Applico la legge di Ampere per H

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = Ni \Rightarrow 2\pi R H = Ni$$

$$H = \frac{Ni}{2\pi R}$$

ottengo quindi $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi R}$

$$\vec{M} = \vec{B}\,\frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0} \implies$$

$$\vec{M} = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi R} \frac{(\mu_r - 1)}{\mu_0 \mu_r} = (\mu_r - 1)\frac{Ni}{2\pi R}$$

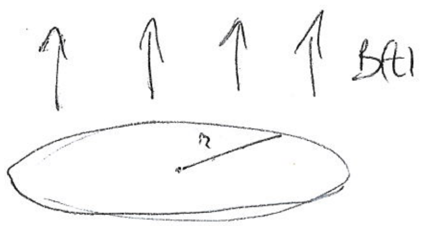
Da qui posso ricavare $i$

$$i = \frac{2\pi R M}{(\mu_r - 1) N}$$

ESERCIZIO

Una spira circolare di raggio $r = 1\,cm$ e resistenza $R = 2\,\Omega$ è immersa in un campo B uniforme diretto parallelamente all'asse della spira di modulo variabile nel tempo $B(t) = B_0 e^{-t}$ con $B_0 = 1\,T$.

Trovare la corrente indotta sulla spira quando $B = \frac{B_0}{2}$




$$\mathcal{E} = - \frac{d\,\phi(B)}{dt}$$ legge di Faraday-Neumann

consideriamo come superficie la superficie piana che ha come bordo la spira

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = - \frac{\partial}{\partial t} B(t) \int dS$$

$$= - \pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} (B_0 e^{-t}) = \pi r^2 B_0 e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} = \pi r^2 B_0 e^{-t} \qquad \text{f.e.m indotta}$$

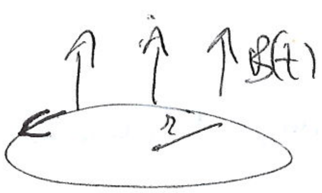
$$\mathcal{E} = Ri = \pi r^2 B_0 e^{-t}$$

da cui segue

$$i = \frac{B_0 e^{-t}}{R} \pi r^2$$

Se il campo B vale $\frac{B_0}{2}$ la corrente indotta sarà

$$i = \frac{B_0}{2R} \pi r^2 = 7.85 \; 10^{-5} \, A$$




$$\frac{d\phi}{dt} < 0 \qquad \mathcal{E} > 0$$

ESERCIZIO

Un filo indefinito e una spira quadrata di lato $l = 1\,mm$ sono posti come in figura. All'istante $t=0$ nel filo circola una corrente $i_0 = 1\,A$ e $d = 1\,mm$

Trovare:

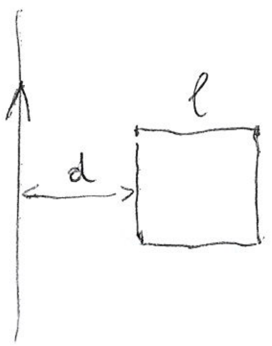
1) $B$ al centro della spira a $t=0$

2) la f.e.m. indotta sulla spira se $d$ resta costante e la corrente varia come:

$$i = i_0 \cos \omega t \qquad \text{con} \qquad \omega = 1\ rad/s$$

3) la f.e.m. indotta a $\bar{t} = 1\,s$ se $i$ resta costante e la spira si muove di moto rettilineo uniforme

$$d(t) = d + vt \qquad v = 1\ mm/s$$




1) Il campo nel centro della spira si trova applicando la legge di Ampere

La curva da considerare è una circonferenza di raggio $x = d + l/2$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i$$

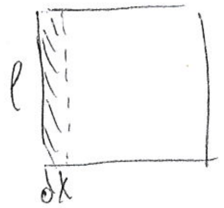
$$2\pi x B = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\left(d + \frac{\ell}{2}\right)} = 1{,}33\ 10^{-4}\ T$$

2)

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, ds$$

considero come elemento di superficie $\ell dx$



il campo ad una generica distanza $x$ è

$$B(t) = \frac{\mu_0\, i(t)}{2\pi x} = \frac{\mu_0 i_0 \cos(\omega t)}{2\pi x}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_d^{d+\ell} \frac{\mu_0 i_0 \cos\omega t}{2\pi x} \ell dx = \frac{\mu_0 i_0 \ell \omega \operatorname{sen} \omega t}{2\pi} \int_d^{d+\ell} \frac{dx}{x}$$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i_0 l \omega \operatorname{sen} \omega t}{2\pi} \log \frac{d+l}{d}$$

sostituendo

$$\mathcal{E} = 1{,}39 \; 10^{-10} \operatorname{sen} \omega t$$

ad esempio se $\tilde{t} = 1.57\,s$ $\quad \mathcal{E}(\tilde{t}) = 1.39 \; 10^{-10}\,V$

3) In questo caso è la spira a muoversi ma comunque cambia il flusso concatenato

Il campo ha la stessa espressione di prima ma gli estremi di integrazione variano nel tempo

$$\mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{d+vt}^{d+vt+l} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} l\,dx = -\frac{\mu_0 i l}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \log\left(\frac{d+vt+l}{d+vt}\right) =$$

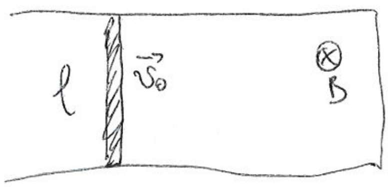
$$= -\frac{\mu_0 i l}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\log\left(1+\frac{l}{d+vt}\right)\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \frac{1}{1+\frac{l}{d+vt}} \frac{l}{d+vt} v = \frac{\mu_0 i l^2}{2\pi (d+vt+l)(d+vt)} v$$

per $\bar{t} = 1\,s$ $\quad \mathcal{E} = 3.33 \; 10^{-11}\,V$

# ESERCIZIO

Una sbarretta conduttrice di lunghezza $l$ e massa $m$ si muove senza attrito lungo due binari conduttori formando un circuito chiuso. La sbarretta si muove con velocità $v_0$ ed entra in una zona in cui è presente un campo $B$ $\perp$ al piano del circuito. Sapendo che il circuito ha resistenza $R$ trovare $V(t)$ e dopo quanto tempo $V(t^*) = V_0/3$




La f.e.m indotta è pari a

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{Bl\,dx}{dt} = -Blv_0$$

la corrente sarà quindi

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Blv_0}{R}$$

La sbarretta sarà quindi sottoposta ad una forza di Lorentz pari a

$$F = i\,\vec{l} \times \vec{B} \qquad \text{NB } \vec{l} \text{ e } \vec{B} \text{ sono } \perp$$

$$F = il B = -\frac{Blv}{R} l B = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

dalla legge di Newton

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{B^2 l^2}{mR} dt$$

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}$$

$$e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t^*} = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad t^* = \frac{Rm}{B^2 l^2} \log 3$$

---

Stessa configurazione di prima ma con un generatore attaccato alla sbarretta che fornisce una ddp pari a $V$

Nella sbarretta circola una corrente $i = \frac{V}{R}$

Essendo immersa in un campo magnetico alla sbarretta agirà una forza

$$F = iBl = \frac{V}{R} Bl$$

il moto della sbarretta farà variare il flusso di B concatenato

$$\frac{d\phi(B)}{dt} = Blv$$

la variazione di $\phi(B)$ produrrà una fem. nel circuito che si oppone a V

$$Ri = V - \text{fem} \rightarrow iR = V - Blv$$

$$i = \frac{V - Blv}{R}$$

la forza agente sul circuito è

$$F = iBl = \frac{V - Blv}{R} Bl = \frac{VBl}{R} - \frac{B^2l^2v}{R} = m\frac{dv}{dt}$$

che ha una soluzione del tipo

$$v(t) = \frac{V}{Bl}\left[1 - e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right]$$