ESERCIZIO

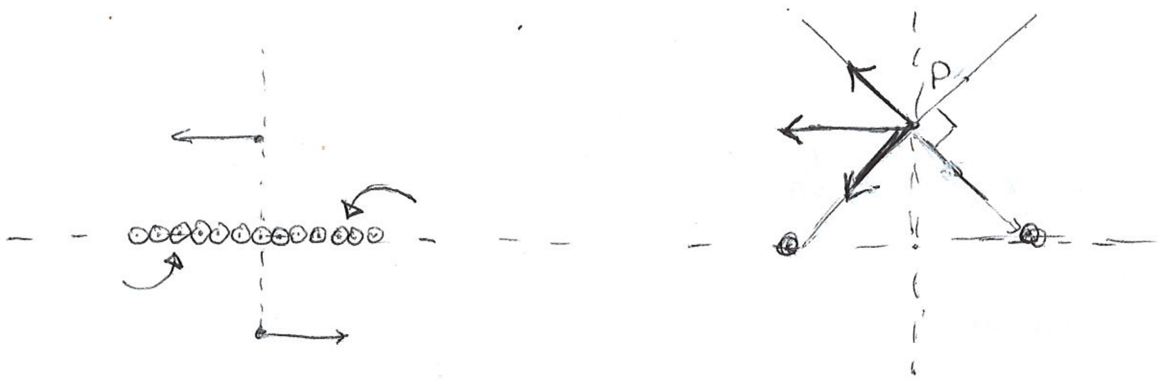
Molti fili rettilinei sono disposti uno accanto all'altro su una superficie piana. Calcolare il campo magnetico da essi prodotto se ciascuno è percorso dalla corrente i.

Chiamiamo n il numero di fili per metro

Avremo dunque che la densità lineare di corrente

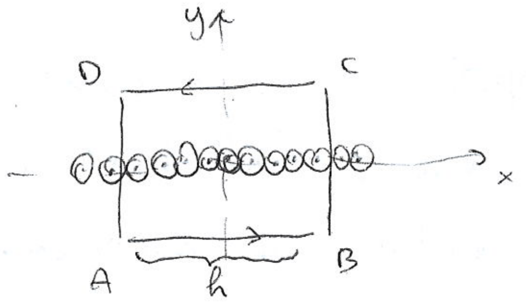
$J_s = ni$

Ossia se considero una linea ortogonale ai fili questa sarà attraversata da ni Ampere per metro



Se il piano di fili percorso da corrente è infinito, per ragioni di simmetria, la direzione di B è quella mostrata in figura

Infatti: se considero i contributi delle coppie di fili simmetriche rispetto a P noto che le componenti $\perp$ al piano si cancellano



Usiamo la legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2Bh$$

infatti su BC e DA ~~la~~ l'integrale ~~circuitazione~~ è nullo mentre su AB e CD vale Bh

Le correnti concatenate sono invece nih

$\Longrightarrow$

$$2Bh = \mu_0 n i h$$

da cui segue

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} = \frac{\mu_0 J_s}{2}$$

Quindi per le y positive avremo

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_x$$

mentre per le y negative avremo

$$\vec{B}_2 = +\frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_x$$

In conclusione una corrente piana indefinita produce un campo magnetico uniforme da ciascuna parte parallelo al piano e ortogonale alle linee di corrente

Possiamo mettere insieme le due espressioni trovate in un'unica espressione

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_t \times \hat{u}_n$$

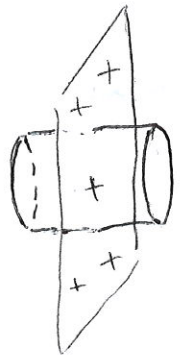
dove $\hat{u}_t$ è il versore concorde a $\vec{J}_s$ e $\hat{u}_n$ è il versore normale al piano diretto nella regione dove voglio calcolare il campo

Una corrente piana infinita non è una situazione fisica realizzabile ma approssima bene una situazione in cui considero il campo molto vicino a una superficie percorsa da corrente che localmente mi appare piana

N.B. il campo B presenta una discontinuità nel passaggio attraverso una sorgente piana

DISCONTINUITÀ DEL CAMPO MAGNETICO

Abbiamo già osservato che il campo elettrico è discontinuo al passaggio di una superficie carica



GAUSS

$$2AE = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

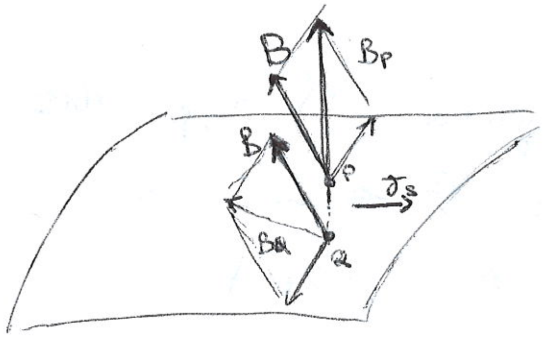
$$\vec{E}(x>0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x$$

$$\vec{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{u}_x$$

In particolare è la componente di E perpendicolare al piano a subire la discontinuità

Vediamo ora cosa succede per B quando attraverso una superficie percorsa da una corrente.
Sia J_s la densità lineare

Considero due punti P e Q molto vicini alla superficie che apparirà quindi piana
Sia P da un lato e Q dall'altro rispetto alla superficie



Il campo magnetico in P e il campo magnetico in Q saranno in generale dati da un termine dovuto alla densità lineare di corrente più un termine dovuto a eventuali altre sorgenti, indicato con B. Questo termine essendo P e Q molto vicini sarà lo stesso nei due casi.

$$\vec{B}_P = \vec{B} + \frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_x \qquad \vec{B}_Q = \vec{B} - \frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_x$$

La discontinuità è data da

$$\vec{B}_P - \vec{B}_Q = \mu_0 J_s \hat{u}_x$$

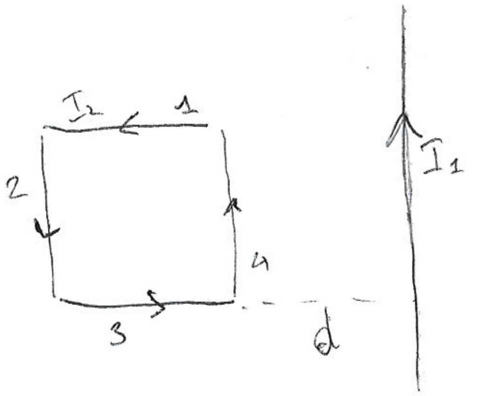
tangente alla superficie e ortogonale alle linee della corrente

In generale quindi:

- la componente normale del campo magnetico non varia nell'attraversare la superficie percorsa da corrente
- la componente tangenziale invece varia con una discontinuità

ESERCIZIO

Una spira quadrata di lato $L = 1\,cm$ è percorsa da una corrente $I_2 = 2A$. Un filo rettilineo complanare alla spira è percorso da corrente $I_1 = 10A$ ed è posto ad una distanza $d = 20\,cm$ dalla spira. Trovare la forza che agisce sulla spira.



La forza che agisce sull'elemento dl di spira è

$$dF = i\,\vec{dl} \times \vec{B}$$

dato che nei lati 1 e 3 la corrente circola in verso opposto la forza complessiva che agisce su questi due lati è nulla.

La F agisce solo sui lati // al filo e su di essi il campo B generato dal filo è costante

Calcoliamolo con Biot-Savart

$$B_4 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+L)}$$

Visto che B è costante su 2 e 4

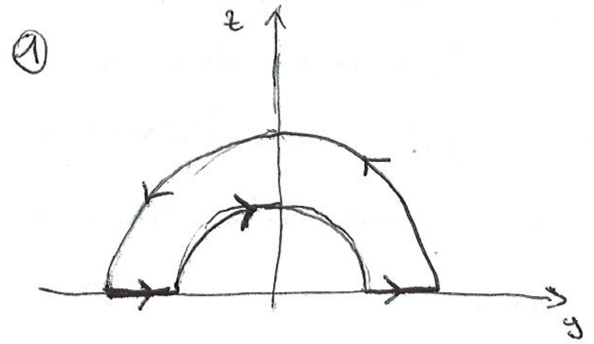
$$\vec{F}_4 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_4$$
$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_2$$

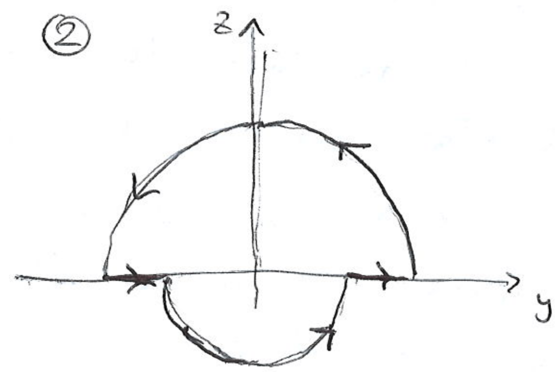
stessa direzione ma verso opposto

$$F_{tot} = F_2 + F_4 = \frac{I_2 L \mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)$$

ESERCIZIO

Si considerino i circuiti in figura. I raggi delle semicirconferenze sono $a = 10\,cm$ e $b = 15\,cm$. La corrente che circola nel circuito è $i = 20\,A$.
Trovare il campo B nel centro e il momento magnetico m in entrambi i casi.





Caso 1

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{u}_r}{r^2}$$

Notiamo che i tratti // all'asse y hanno contributo nullo
inoltre sulle semicirconferenze $ds \perp \hat{u}_r$

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2} \int ds - \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2} \pi b - \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \pi a =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = -2.1\ 10^{-5}\,T$$

Il momento magnetico vale

$m = i A$ dove A è l'area della spira

$$m = i \frac{1}{2}(\pi b^2 - \pi a^2) = i\frac{\pi}{2}(b^2 - a^2) = 0.39\, A m^2$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$

Anche in questo caso i tratti // a y danno contributo nullo

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2}\int ds + \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2}\int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2}\pi b + \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2}\pi a =$$

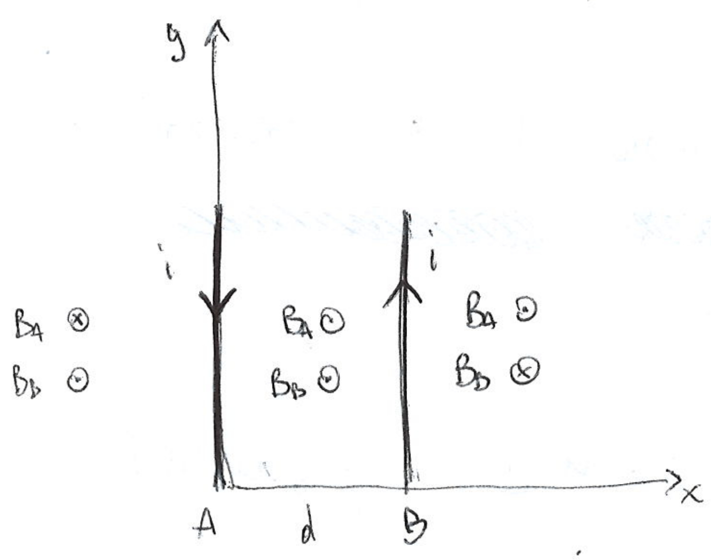
$$= \frac{\mu_0 i}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) = 10.5 \cdot 10^{5}\, T$$

mentre per il momento magnetico

$$m = i A = i\,\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2) = 1.02\, A m^2$$

ESERCIZIO

Due fili // sono percorsi da una corrente i in versi opposti. I due fili si trovano a una distanza d. Calcolare B in tutto lo spazio.



$\boxed{x<0}$

Legge di Ampere

$$\oint B_A \, dl = \mu_0 i_A \quad \rightarrow \quad 2\pi x B_A = \mu_0 i_A$$

$$B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi x}$$

$$\oint B_B \, dl = \mu_0 i_B \quad \rightarrow \quad 2\pi (x+d) B_B = \mu_0 i_B$$

$$B_B = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi (x+d)}$$

$$B = B_A - B_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+d}\right]$$

$i_B = -i_A$

Analogamente in $\boxed{x > d}$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[\frac{1}{x-d} - \frac{1}{x}\right]$$

infatti

$$\oint B_A \, dl = \mu_0 i_A \rightarrow 2\pi x B_A = \mu_0 i_A \qquad B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi x}$$

$$\oint B_B \, dl = \mu_0 i_B \rightarrow 2\pi (x-d) B_B = \mu_0 i_B \qquad B_B = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi (x-d)}$$

per $\boxed{0 < x < d}$

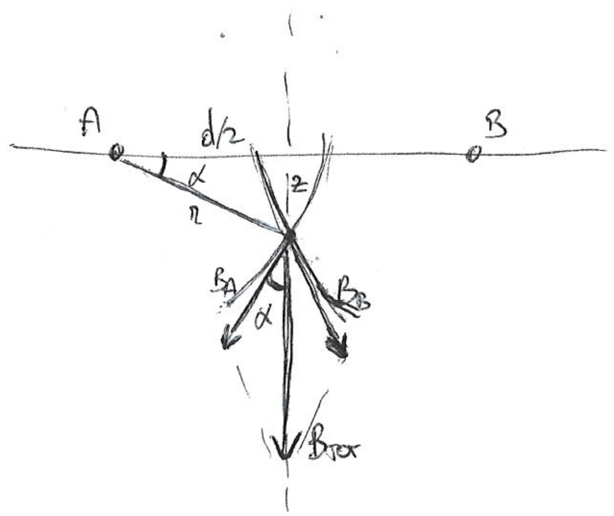
$$\oint B_A \, dl = \mu_0 i_A \Longrightarrow B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi x}$$

$$\oint B_B \, dl = \mu_0 i_B \Longrightarrow B_B = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi (d-x)}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x}\right)$$

Cosa succede fuori dal piano xy?

Consideriamo ad esempio un punto dell'asse perpendicolare al segmento d e passante per d/2



$$d/2 = r\cos\theta$$

$$B_{TOT} = 2B(r)\cos\theta = 2B(r)\frac{d/2}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{d}{r} = \frac{\mu_0 i d}{2\pi r^2}$$