

ESERCIZIO

Molti fili rettilinei sono disposti uno accanto all'altro su una superficie piana. Calcolare il campo magnetico da essi prodotto se ciascuno è percorso dalla corrente i .

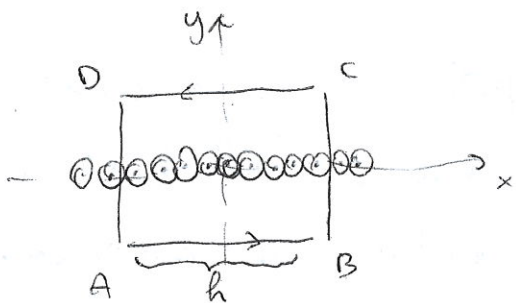
Chiamiamo n il numero di fili per metro. Avremo dunque che la densità lineare di corrente $J_s = ni$

Ossia se considero una linea ortogonale ai fili questa sarà attraversata da ni Ampere per metro



Se il piano di fili percorso da corrente è infinito, per regioni di simmetria, la direzione di B è quella mostrata in figura

Infatti se considero i contributi delle coppie di fili simmetriche rispetto a P noto che le componenti \perp al piano si cancellano



Usiamo la legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 2Bh$$

infatti su BC e DA ~~la~~ l'integrale ~~è~~ è nullo
mentre su AB e CD vale Bh

Le correnti concatenate sono invece nih

⇒

$$2Bh = \mu_0 ni h$$

da cui segue

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2} = \frac{\mu_0 J_s}{2}$$

Quindi per h y positive ovvero

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_x$$

mentre per h y negative ovvero

$$\vec{B}_2 = +\frac{\mu_0 J_s}{2} \hat{u}_x$$

Una conduttrice una corrente piana indefinita produce un campo magnetico uniforme da ciascuna parte parallelo al piano e ortogonale alla linea di corrente

Possiamo mettere insieme le due espressioni trovate in un'unica espressione

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{2} \hat{U}_t \times \hat{U}_n$$

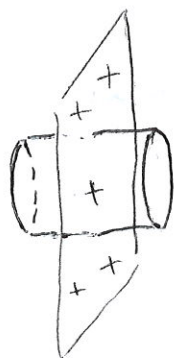
dove \hat{U}_t è il versore concorde a \vec{J}_s e \hat{U}_n è il versore normale al piano, diretto nella regione dove voglio calcolare il campo

Una corrente piana infinita non è una situazione fisica realizzabile ma approssima bene una situazione in cui considero il campo molto vicino a una superficie percorsa da corrente che localmente mi appare piana

N.B. il campo B presenta una discontinuità nel passaggio attraverso una sorgente piana

DISCONTINUITA' DEL CAMPO MAGNETICO

Abbiamo già osservato che il campo elettrico è discontinuo al passaggio da una superficie carica



GAUSS

$$2AE = \frac{\delta A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\delta}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(x > 0) = \frac{\delta}{2\epsilon_0} \hat{U}_x$$

$$\vec{E}(x < 0) = -\frac{\delta}{2\epsilon_0} \hat{U}_x$$

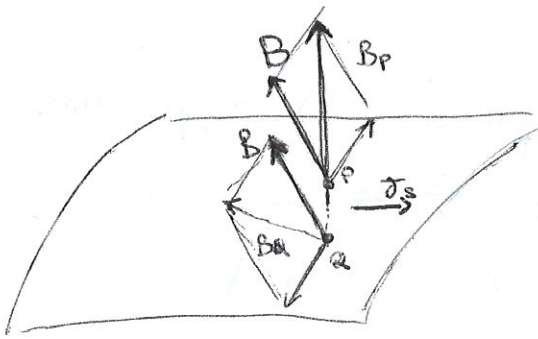
In particolare è la componente di E perpendicolare al piano a subire la discontinuità

Vediamo ora cosa succede per B quando attraverso una superficie percorsa da una corrente.

Sia J_s la densità lineare

Considero due punti P e Q molto vicini alla superficie che approssimo quindi piana

Sia P da un lato e Q dall'altro rispetto alla superficie



Il campo magnetico in P e il campo magnetico in Q saranno in generale dati da un termine dovuto alla densità lineare di corrente più un termine dovuto a eventuali altre sorgenti, indicati con B . Questo termine essendo P e Q molto vicini sarà lo stesso nei due casi.

$$\vec{B}_P = \vec{B} + \frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} \hat{u}_x \quad \vec{B}_Q = \vec{B} - \frac{\mu_0 \vec{j}_s}{2} \hat{u}_x$$

La discontinuità è data da

$$\vec{B}_P - \vec{B}_Q = \mu_0 \vec{j}_s \hat{u}_x$$

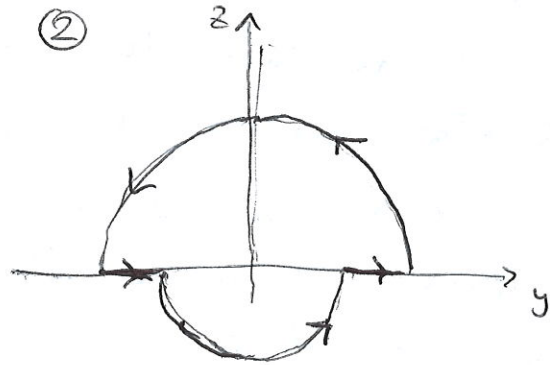
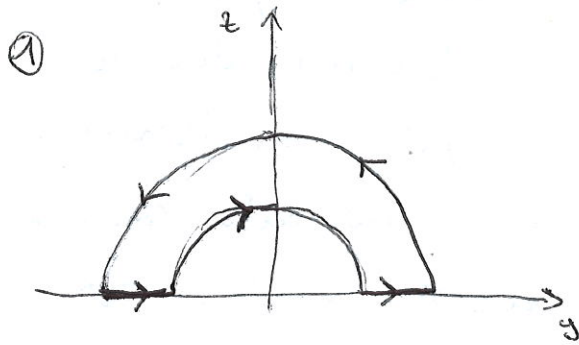
tangente alla superficie e ortogonale alle linee della corrente

In generale quindi:

- la componente normale del campo magnetico non varia nell'attraversare la superficie percorsa da corrente
- la componente tangenziale invece varia con una discontinuità

ESERCIZIO

Si considerino i circuiti in figura. I raggi della semicirconferente sono $a=10\text{cm}$ e $b=15\text{cm}$. La corrente che circola nel circuito è $i=20\text{A}$. Trovare il campo B nel centro e il momento magnetico m in entrambi i casi.



Caso 1

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{U}_r}{r^2}$$

Notiamo che i tratti // all'asse y hanno contributo nullo

inoltre sulle semicirconferenze $d\vec{s} \perp \hat{U}_r$

$$B_0 = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2} \int ds - \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2} \pi b - \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \pi a =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = -2.1 \cdot 10^{-5} \text{T}$$

Il momento magnetico vale

$m = iA$ dove A è l'area della spira

$$m = i \frac{1}{2} (\pi b^2 - \pi a^2) = i \frac{\pi}{2} (b^2 - a^2) = 0.39 \text{ Am}^2$$

Caso 2

Anche in questo caso i tratti // a y danno contributo nullo

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2} \int ds + \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \int ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi b^2} \pi b + \frac{\mu_0 i}{4\pi a^2} \pi a = \\ &= \frac{\mu_0 i}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right) = 10.9 \cdot 10^5 \text{ T} \end{aligned}$$

mentre per il momento magnetico

$$m = iA = i \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2) = 1.02 \text{ Am}^2$$

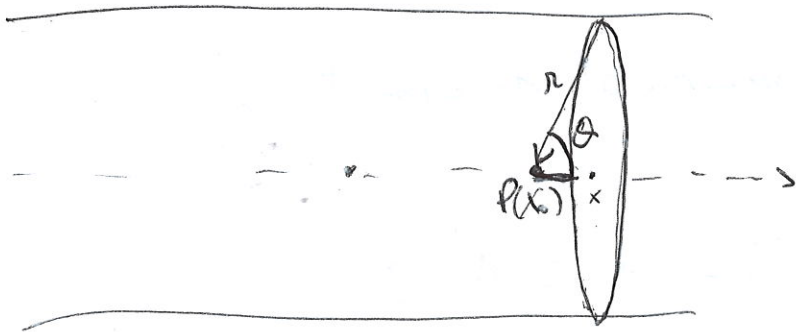
ESERCIZIO

Un avvolgimento di $N=5 \cdot 10^3$ spire è disposto sulla superficie di un cilindro lungo $d=50\text{cm}$ e di raggio $r=8\text{cm}$. Trovare il campo B sull'asse del solenoide e estendere il risultato nel caso $d \rightarrow \infty$. Trovare il coefficiente di auto-induzione.

Definisco $n = \frac{N}{d}$ come numero di spire per unità di lunghezza

\Rightarrow nel tratto dx sono $n dx$ spire

Dato un punto P sull'asse x il campo prodotto dallo spiro con centro in x vale



$$dB = \frac{\mu_0 i r^2 n dx}{2 r^3}$$

notiamo che

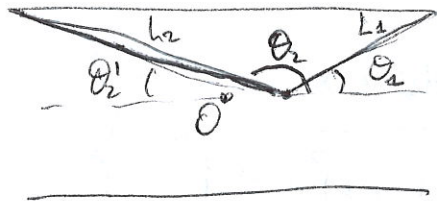
$$r \sin \theta = R \quad \rightarrow \quad r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$x - x_0 = \frac{R}{\operatorname{tg} \theta} \quad \rightarrow \quad dx = -\frac{R}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta$$

Riscrivo quindi dB come

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 m}{2} \left(-\frac{R}{\operatorname{sen}^2 \theta} d\theta \right) \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{R^3}$$

$$= -\frac{\mu_0 i m}{2} \operatorname{sen} \theta d\theta$$



Per trovare il campo in P devo integrare da θ_1 e θ_2

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\frac{\mu_0 i m}{2} \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{\mu_0 i m}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

ma dato che $\theta_2 = \pi - \theta_1'$

$$B = \frac{\mu_0 i m}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_1')$$

inoltre

$$\frac{d}{2} - x = L_1 \cos \theta_1$$

$$\frac{d}{2} + x = L_2 \cos \theta_2'$$

$$L_1 = \left[\left(\frac{d}{2} - x \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}$$

$$L_2 = \left[\left(\frac{d}{2} + x \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}$$

da cui segue

$$\cos \theta_1 = \frac{\frac{d}{2} - x}{\left[\left(\frac{d}{2} - x \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}}$$

$$\cos \theta_2' = \frac{\frac{d}{2} + x}{\left[\left(\frac{d}{2} + x \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}}$$

$$\Rightarrow B(x) = \frac{\mu_0 n i}{2} \left\{ \frac{\frac{d}{2} - x}{\left[\left(\frac{d}{2} - x \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}} + \frac{\frac{d}{2} + x}{\left[\left(\frac{d}{2} + x \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}} \right\}$$

nel centro $x=0$

$$B = \mu_0 n i \frac{d}{(d^2 + 4R^2)^{1/2}}$$

Sulle focce $x = d/2$

$$B = \frac{\mu_0 n i}{2} \frac{d}{(d^2 + R^2)^{1/2}}$$

Se $d \rightarrow a$

$$\underline{B = \mu_0 n i}$$

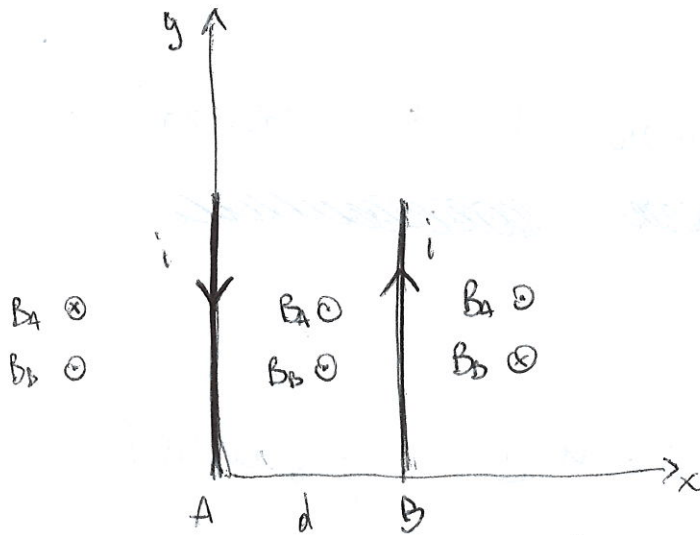
omica il campo è uniforme in tutto il solenoide

Calcoliamo ora il flusso di B attraverso il solenoide stesso ~~in~~ ~~per~~ ~~per~~ ~~per~~ per unità di lunghezza

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{n \Sigma B}{i} = \mu_0 n^2 \Sigma = \mu_0 n^2 \pi R^2$$

ESERCIZIO

Due fili // sono percorsi da una corrente i in versi opposti. I due fili si trovano a una distanza d . Calcolero B in tutto lo spazio.



$$x < 0$$

Legge di Ampere

$$\oint B_A dl = \mu_0 i_A \quad \rightarrow \quad 2\pi x B_A = \mu_0 i_A$$

$$B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi x}$$

$$\oint B_B dl = \mu_0 i_B \quad \rightarrow \quad 2\pi (x+d) B_B = \mu_0 i_B$$

$$B_B = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi (x+d)}$$

$$B = B_A - B_B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+d} \right]$$

$i_B = -i_A$

Analogamente in $x > d$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left[\frac{1}{x-d} - \frac{1}{x} \right]$$

rifatti:

$$\oint B_A dl = \mu_0 i_A \rightarrow 2\pi x B_A = \mu_0 i_A \quad B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi x}$$

$$\oint B_B dl = \mu_0 i_B \rightarrow 2\pi (x-d) B_B = \mu_0 i_B \quad B_B = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi (x-d)}$$

per $0 < x < d$

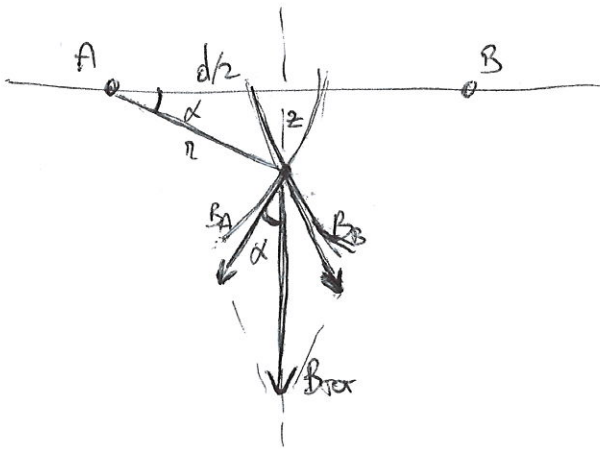
$$\oint B_A dl = \mu_0 i_A \Rightarrow B_A = \frac{\mu_0 i_A}{2\pi x}$$

$$\oint B_B dl = \mu_0 i_B \Rightarrow B_B = \frac{\mu_0 i_B}{2\pi (d-x)}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\frac{1}{d-x} + \frac{1}{x} \right)$$

Cosa succede fuori dal piano xy?

Consideriamo ad esempio un punto dell'asse
perpendicolare al segmento d e formato per $d/2$



$$d/2 = r \cos \theta$$

$$B_{\text{Tot}} = 2B(r) \cos \theta = 2B(r) \frac{d/2}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 i d}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i d}{2\pi r^2}$$