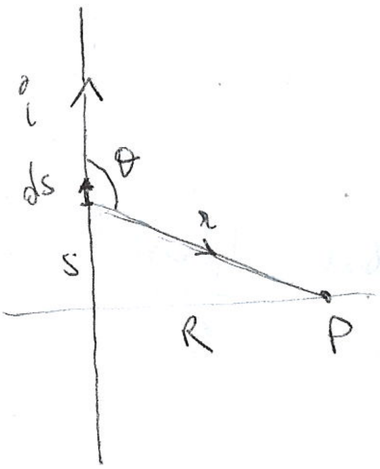
ESERCIZIO

Calcolare il campo di induzione magnetica $\vec{B}_0$ prodotto da un filo conduttore rettilineo, indefinito, di spessore trascurabile, percorso da una corrente $i = 1A$ in un punto P distante 1 m dal filo



I° legge di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\vec{ds} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

la risultante del prodotto vettoriale sarà perpendicolare al foglio e entrante

in modulo avremo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{ds \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

osservo che

$$r(\operatorname{sen}(\pi - \theta)) = r \operatorname{sen} \theta = R$$

perciò posso riscrivere $\frac{1}{r^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R^2}$

inoltre

$$s\,tg(\pi-\theta) = -s\,tg\,\theta = R \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{R}{tg\,\theta}$$

calcoliamo ds

$$ds = \frac{R}{tg^2\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{R\,d\theta}{sen^2\theta}$$

$\Rightarrow$

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{\cancel{sen^2\theta}}{R^{\cancel{2}}}\,sen\,\theta\,\frac{\cancel{R}}{\cancel{sen^2\theta}}\,d\theta = -\frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{d(\cos\theta)}{R}$$

integriamo su metà del filo

$$\bar{B} = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_1^0 d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$$

$B = 2\bar{B}$

ci sono analoghi contributi dall'altra metà del filo

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\,\hat{u}_\phi$$

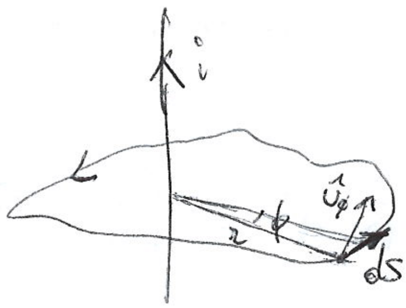
BIOT-SAVART

LEGGE DI AMPERE

Consideriamo un filo rettilineo indefinito e un cammino generico descritto dal vettore infinitesimo $\vec{ds}$

$\Rightarrow$ il prodotto scalare $\vec{B} \cdot \vec{ds}$ sarà dato da

$$\vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{u}_\phi \cdot \vec{dS}$$



$$\hat{u}_\phi \cdot \vec{dS} = r\, d\phi$$

$$B \cdot dS = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi$$

Consideriamo la circuitazione di $\vec{B}$ lungo una linea chiusa

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi$$

abbiamo 2 possibilità:

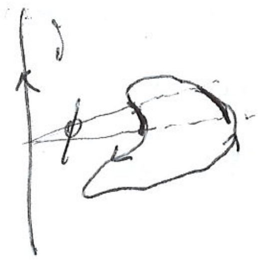
- o la linea chiusa concatena la corrente i

$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot \vec{ds} = \pm \mu_0 i$$

il segno dipende dal fatto che il verso di percorrenza della linea sia legato o no a quello di i

- la linea chiusa non concatena il filo

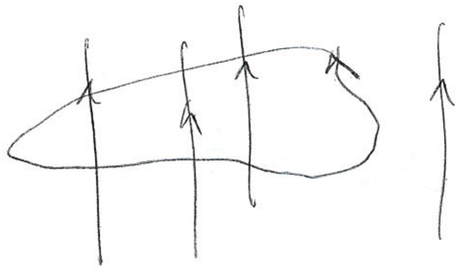
$$\Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$



Se ho n fili j dei quali concatenati con il cammino considerato avremo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \left(\Sigma_n \vec{B}_n \right) \cdot d\vec{S} = \Sigma_n \oint \vec{B}_n \cdot d\vec{S}$$

$$= \Sigma_j \mu_0 i_j$$



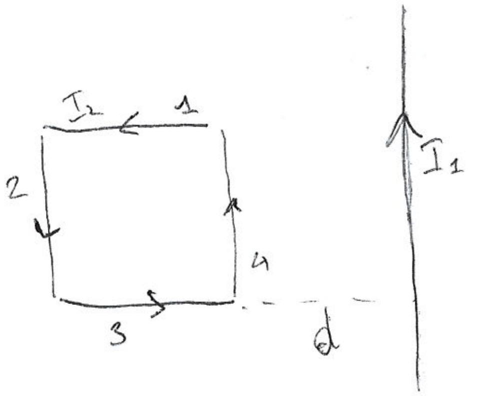
dove nella somma delle correnti concatenate va preso il segno opportuno

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Sigma_j \mu_0 i_j}$$

LEGGE DI AMPERE

ESERCIZIO

Una spira quadrata di lato $L = 1\,cm$ è percorsa da una corrente $I_2 = 2A$. Un filo rettilineo complanare alla spira è percorso da corrente $I_1 = 10A$ ed è posto ad una distanza $d = 20\,cm$ dalla spira. Trovare la forza che agisce sulla spira.



La forza che agisce sull'elemento dl di spira è

$$dF = i\,\vec{dl} \times \vec{B}$$

dato che nei lati 1 e 3 la corrente circola in verso opposto la forza complessiva che agisce su questi due lati è nulla.

La F agisce solo sui lati // al filo e su di essi il campo B generato dal filo è costante

Calcoliamolo con Biot-Savart

$$B_4 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+L)}$$

Visto che B è costante su 2 e 4

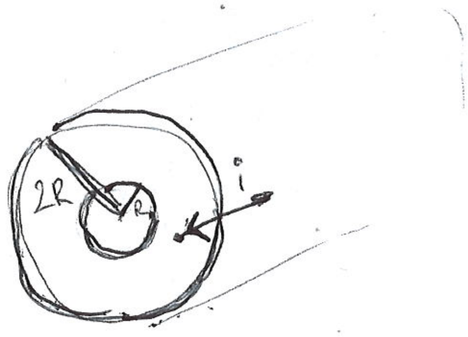
$$\vec{F}_4 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_4$$
$$\vec{F}_2 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_2$$

stessa direzione ma verso opposto

$$F_{tot} = F_2 + F_4 = \frac{I_2 L \mu_0 I_1}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right)$$

ESERCIZIO

Un conduttore cilindrico cavo di raggio interno R e raggio esterno 2R è percorso da una corrente i. Trovare il campo B in tutto lo spazio



Applico la legge di Ampere

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_k i_k = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{u} \, dS$$

→ scrivo la corrente concatenata in termini densità di corrente J

Distinguiamo vari casi

$\boxed{r < R}$

All'interno della cavità $i = 0 \Rightarrow B = 0$

$\boxed{r > 2R}$

$$\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 i \Rightarrow$$

$$\oint_r B\, dS = B \oint_r dS = 2\pi r B = \mu_0 i$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$\boxed{R < r < 2R}$

Solo una porzione della densità di corrente J sarà concatenata

Nell'ipotesi in cui J sia uniforme sulla sezione avremo

$$J = \frac{i}{\sigma} = \frac{i}{4R^2\pi - \pi R^2} = \frac{i}{3\pi R^2}$$

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{i}{3\pi R^2} \int_R^r 2\pi r' dr' = \frac{i}{3\pi R^2} 2\pi \frac{r^2 - R^2}{2} =$$

$$= \frac{i}{3R^2} (r^2 - R^2)$$

Quindi

$$2\pi r B = \frac{\mu_0 i}{3R^2}(r^2 - R^2)$$

da cui otteniamo

$$B = \frac{\mu_0 i}{6\pi R^2}\,\frac{r^2 - R^2}{r}$$

ESERCIZIO

Un conduttore cilindrico di raggio R_1 è contenuto all'interno di una guaina conduttrice cilindrica di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3.
Il conduttore interno è percorso da una corrente i mentre nella guaina circola la stessa corrente i in verso opposto. Sapendo che la corrente che circola nella guaina è uniforme calcolare B in tutto lo spazio nel caso in cui

1) i è distribuita solo sulla superficie del conduttore
2) i è uniforme sulla sezione del conduttore

Considero 4 regioni

$0 < r \leq R_1 \qquad R_1 \leq r \leq R_2 \qquad R_2 \leq r \leq R_3 \qquad r \geq R_3$

Applico la legge di Ampere

$\boxed{\text{per } r \geq R_3}$ $B=0$ perché la somma delle correnti concatenate è nulla

$\boxed{\text{per } R_1 \leq r \leq R_2}$ $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ indipendentemente da come sono distribuite le correnti nel conduttore

$\boxed{0 < r \leq R_1}$

Se la corrente è superficiale il campo è nullo

$B = 0$

Se è uniformemente distribuita

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds$$

$$J = \frac{i}{\pi R_1^2}$$

$\Rightarrow$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \int_0^r \frac{i}{\pi R_1^2} 2\pi r' dr'$$

da cui

$$\cancel{2\pi} r B = \mu_0 \frac{i}{\pi R_1^2} \cancel{2\pi} \frac{r^2}{2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i r}{2\pi R_1^2}$$

$\boxed{\text{per } R_2 \leq r \leq R_3}$

$$J_G = \frac{-i}{\pi (R_3^2 - R_2^2)}$$

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{\mu_0 i}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \int_{R_2}^{r} 2\pi r' dr' + \mu_0 i$$