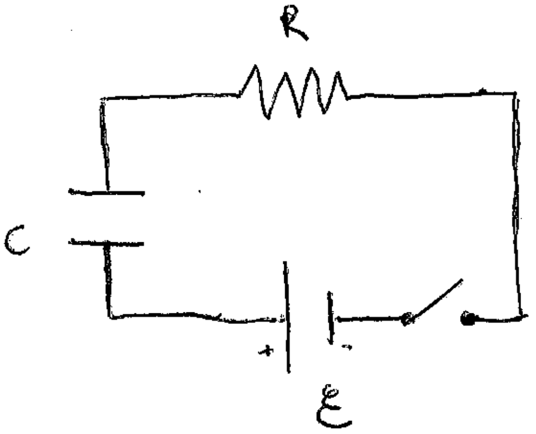
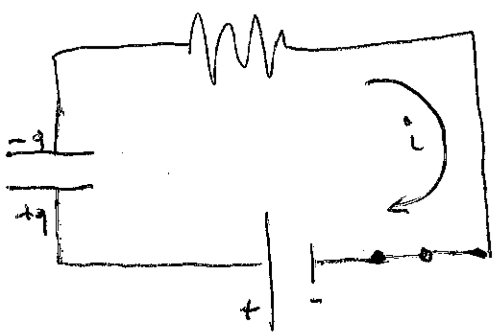
CIRCUITO RC - CARICA E SCARICA DEL CONDENSATORE



Al tempo $t<0$ il circuito è aperto, la corrente non circola e il condensatore è scarico

Al tempo $t=0$ il circuito viene chiuso. Sulle armature di C compaiono le cariche $+q$ e $-q$. Il processo continua finché la carica del condensatore non raggiunge il valore $q = C\mathcal{E}$ per cui la d.d.p. tra le armature è uguale alla f.e.m.



In un istante t qualsiasi vale la relazione

$$\mathcal{E} = V_R + V_C = R\, i(t) + \frac{q(t)}{C} \quad , \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

In questo caso abbiamo considerato la resistenza interna del generatore R_{int} compresa in R abbiamo pertanto

$$R\frac{dq}{dt} = \mathcal{E} - \frac{q}{C} \rightarrow R\frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E} - q}{C}$$

che posso risolvere per separazione delle variabili

$$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC}$$

integriamo tra $t'=0$ e $t'=t$ a cui corrispondono carica 0 e q

$$\int_0^q \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

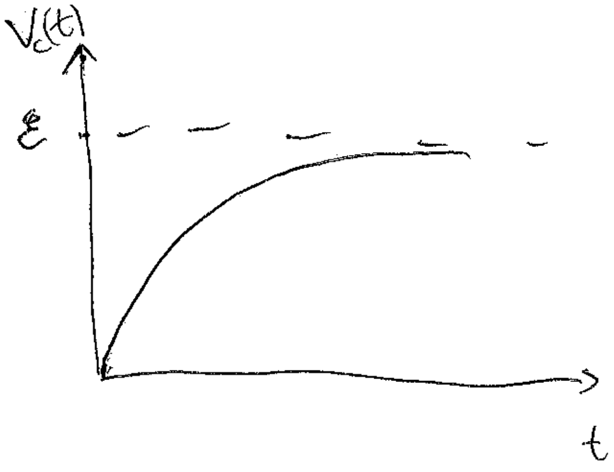
$$\ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

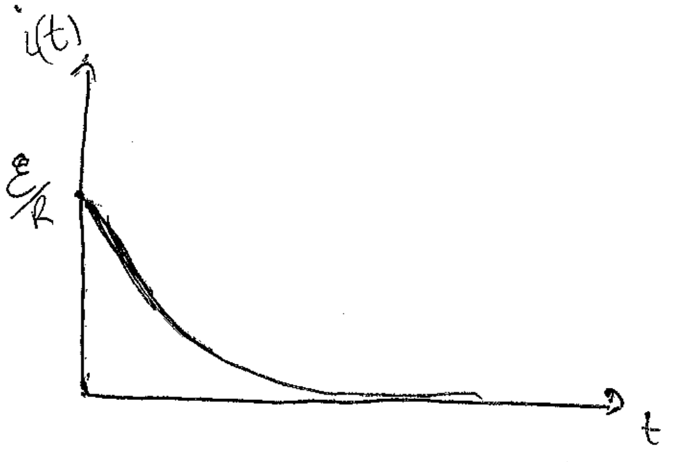
$$\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-t/RC}$$

da cui ottengo

$$q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right) \qquad V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} \qquad V_R(t) = R\,i(t) = \mathcal{E}\,e^{-t/RC}$$





$\tau = RC$ è detta costante di tempo del circuito

ha le dimensioni di un tempo

$$RC = \Omega F = \frac{V}{A}\frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$$

in un tempo $\Delta t = \tau$ la funzione $e^{-t/\tau}$ si è ridotta di un fattore e

in pratica dopo 5τ sia $V_c(t)$ che $i(t)$ hanno raggiunto il loro valore asintotico con un errore del sette per mille

Ossia in particolare la corrente i che era massima per $t=0$ va a zero

e la d.d.p ai capi del condensatore tende alla f.e.m.

La potenza erogata dal generatore vale

$$P_{gen} = \mathcal{E} i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC}$$

La potenza dissipata dalla resistenza vale

$$P_R = Ri^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}$$

mentre il lavoro per unità di tempo compiuto dal condensatore che aumenta la sua energia elettrostatica vale

$$P_c = V_c \frac{dq}{dt} = V_c i = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-t/RC} - \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}$$

In ogni istante quindi vale

$$P_{gen} = \cancel{P_R} + P_c \qquad \text{conservazione dell'energia}$$

Integrando le potenze in dt tra zero e ∞ si ottiene

$$W_{gen} = C\mathcal{E}^2$$

$$W_R = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

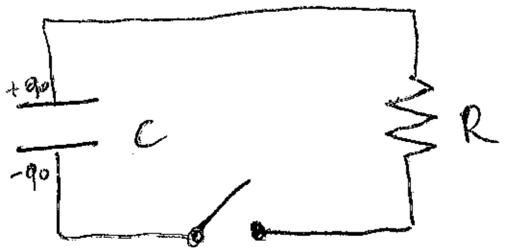
$$\Delta U = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2$$

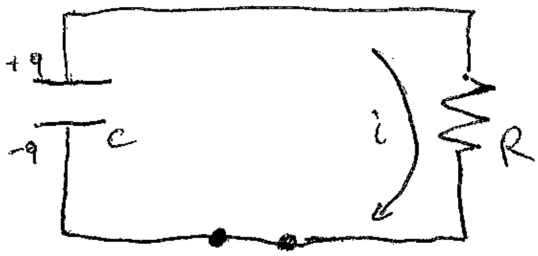
Ossia nella carica di un condensatore il 50% dell'energia fornita dalla f.e.m. va in energia elettrostatica e l'altro 50% viene dissipato dalla resistenza indipendentemente dai valori di R e C

SCARICA

Considero un condensatore carico con carica iniziale q_0

La d.d.p. ai capi di C sarà $V = \frac{q_0}{C}$ e l'energia elettrostatica in esso immagazzinata sarà $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$





Al tempo t=0 chiudo l'interruttore, le cariche si muovono dall'armatura a potenziale maggiore all'armatura a potenziale minore creando una corrente attraverso la resistenza pari a $i = -\frac{dq}{dt}$.

N.B. ci vuole il segno meno perché la carica diminuisce col tempo

Nell'istante generico t avremo $V_R = V_C$

$V_C = \frac{q}{C} = Ri = V_R$ $i = -\frac{dq}{dt}$

$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$ risolvendo per separazione delle variabili

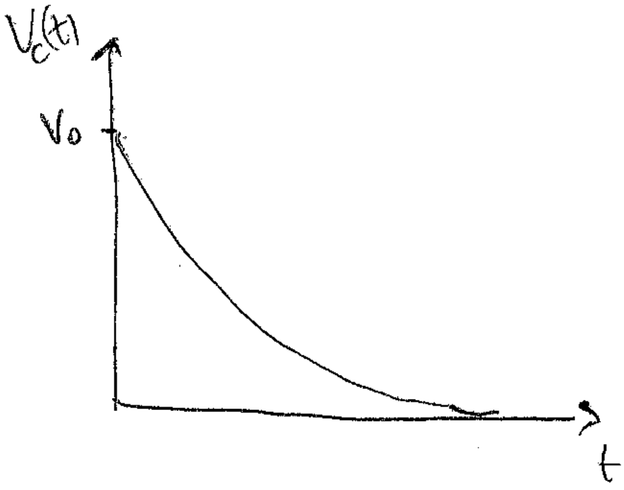
$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC} \rightarrow \ln\frac{q}{q_0} = -\frac{t}{RC}$

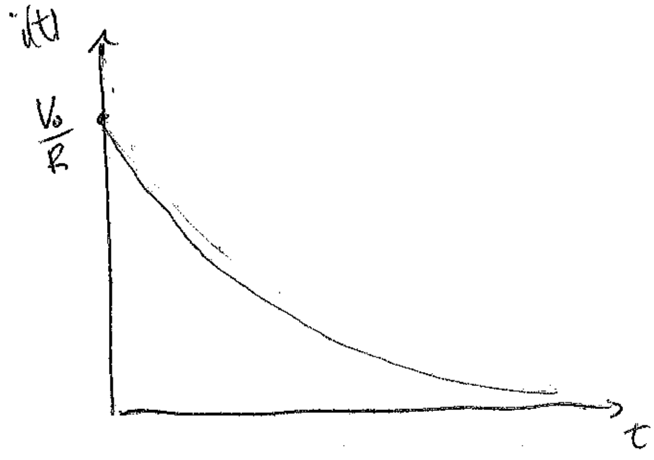
ossia

$$q(t) = q_0 \, e^{-t/RC}$$

$$V_c(t) = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-t/RC} = V_0 \, e^{-t/RC}$$

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{1}{R} V_0 \, e^{-t/RC} = \frac{V_c(t)}{R}$$





La potenza dissipata su R è

$$P_R = R\, i^2 = \frac{V_0^2}{R} e^{-2t/RC}$$

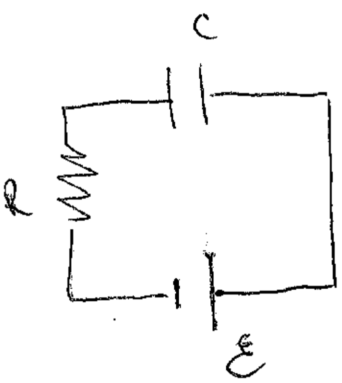
durante la scarica quindi l'energia totale dissipata sarà

$$W_R = \int_0^\infty P_R \, dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{q_0^2}{2C}$$

che era proprio l'energia immagazzinata nel condensatore

ESERCIZIO

Un condensatore con capacità $C = 1\,\mu F$ viene caricato in un circuito con $\mathcal{E} = 10\,V$ e una resistenza complessiva di un $M\Omega$. Dopo $t = 1\,s$ il condensatore viene staccato dal circuito e riempito con un dielettrico con $\varepsilon_r = 2$. Trovare ΔV ai capi del condensatore.



Nel circuito RC

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + Ri \qquad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{q}{RC} + \frac{dq}{dt}$$

$$\rightarrow \quad q = q_0 \left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$V_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C}\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

sostituendo $C = 1\,\mu F$ $R = 1\,M\Omega$ $t = 1\,s$ si ottiene

$$V_c(t = 1\,s) = \frac{q_0}{C}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \mathcal{E}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

inizialmente avevamo

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

e dopo l'inserimento del dielettrico avremo

$$C' = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C$$

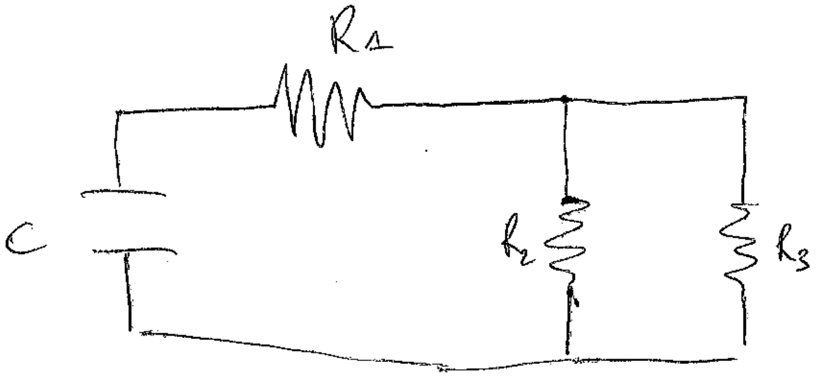
dopo aver staccato il condensatore la carica sulle armature resta costante

$$q = C V_c = C' V_c' = \varepsilon_r C V_c'$$

$$\Rightarrow V_c' = \frac{V_c(t=1s)}{\varepsilon_r} = 3.16 \text{ V}$$

ESERCIZIO

Un condensatore di capacità $C = 1\ \mu F$ viene caricato a una d.d.p. $V_0 = 100\ V$ e staccato dal generatore. Viene quindi collegato al circuito in fig e si scarica in un tempo t^*. Trovare l'energia persa per effetto Joule in tutto il circuito e in R_1 se $R_1 = R_2 = R_3 = R$



calcoliamo per prima cosa R_{TOT}

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \rightarrow R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

allora

$$R_{TOT} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} =$$

$$= R + \frac{R^2}{2R} = \frac{3}{2} R$$

abbiamo ricondotto il problema a un circuito RC

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{3}{2} R i = V_R$$

$$\frac{q}{C} = -\frac{3}{2} R \frac{dq}{dt}$$ N.B. $i = -\frac{dq}{dt}$

$$\int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{2}{3RC} \int_0^t dt \longrightarrow q = q_0 e^{-2t/3RC}$$

$\Rightarrow$

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{2}{3} \frac{q_0}{C} \frac{1}{R} e^{-2t/3RC} = \frac{2}{3} \frac{V_0}{R} e^{-2t/3RC}$$

$$= i_0 e^{-2t/3RC}$$

Per trovare l'energia persa basta integrare in dt la potenza dissipata $P = R_{tot}\, i^2(t)$

$$W = \int_0^\infty \frac{3}{2} R \left(\frac{2V_0}{3R}\right)^2 e^{-4t/3RC} =$$

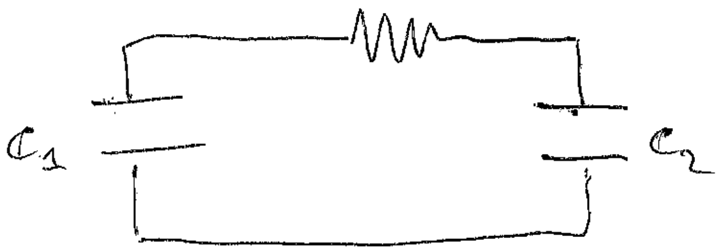
$$= + \frac{\cancel{3}R}{2} \frac{\cancel{4}}{\cancel{9}} \frac{V_0^2}{\cancel{R^2}} \frac{\cancel{3}RC}{\cancel{4}} = + \frac{1}{2} C V_0^2 = 5 \cdot 10^{-3}\ J$$

mentre la potenza dissipata su R_1 sarà

$$W_1 = \int_0^\infty R \frac{4V_0^2}{9R^2} e^{-4t/3RC} = + \frac{4V_0^2}{9R} \frac{3RC}{4} = + \frac{1}{3} C V_0^2$$

ESERCIZIO

Un condensatore carico C_1 con carica q viene collegato in parallelo, attraverso una resistenza R, a un secondo condensatore C_2 scarico.
Trovare l'energia dissipata per effetto Joule sulla resistenza R.



$C_1 = 10\ \mu F$

$C_2 = 50\ \mu F$

$q = 10\ mC$

$R = 1\ K\Omega$

Al termine della fase transiente la ΔV tra i due condensatori sarà la stessa

$$\Delta V = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\,\Delta V$$

ma $q_1 + q_2 = q$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{q}{C_1 + C_2} = 166.7\ V$$

Uso la conservazione dell'energia.
L'energia dissipata si ottiene come differenza tra l'energia immagazzinata nel 1° condensatore all'inizio e quella immagazzinata nei 2 condensatori in parallelo alla fine

$$E_{in} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} = 5\,J$$

$$E_{fin} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1+C_2} = 0.833\,J$$

$$\Delta E = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1+C_2} - \frac{1}{C_1}\right) =$$

$$= \frac{q^2}{2}\,\frac{C_2}{C_1(C_1+C_2)} = 4.167\,J$$

LEGGI DI KIRCHHOFF

RETI ELETTRICHE:

Gli elementi geometrici che costituiscono una rete sono:

NODI → Punti in cui convergono almeno 3 conduttori

RAMI → Collegamenti tra i vari nodi della rete

- in ogni ramo possono trovarsi sia componenti attivi (generatori) che passivi (resistenze)

MAGLIE → Cammini chiusi all'interno della rete

- ciascun ramo può appartenere a più maglie

1° legge di Kirchhoff (o dei nodi)

La somma algebrica delle correnti in un nodo è nulla

$$\boxed{\sum_k i_k = 0}$$

devo considerare con un dato segno le correnti entranti e con il segno opposto le correnti uscenti

→ deriva dal principio di conservazione della carica per una corrente stazionaria

2° legge di Kirchhoff (o delle maglie)

considero una maglia e fisso un verso di percorrenza arbitrario → In ogni ramo avrò quindi fissato un verso della corrente che lo percorre.

$$\boxed{\sum_k R_k i_k = \sum_k \mathcal{E}_k}$$

La somma algebrica delle f.e.m. nei rami della maglia è uguale alla somma algebrica di $R_k i_k$ nei rami della maglia

N.B. comprese le resistenze interne dei generatori

CONVENZIONE DEI SEGNI

- Se nel ramo K-esimo la corrente i_k è concorde al verso scelto nella maglia $R_k i_k > 0$
- Se è discorde $R_k i_k < 0$

- Se la sorgente di f.e.m. $\mathcal{E}_k$ è attraversata dal senso di percorrenza fissato nel verso che va da − a + allora $\mathcal{E}_k > 0$

- Se viene attraversata nel verso che va da + a − allora $\mathcal{E}_k < 0$

Se la rete ha $N (\geq 2)$ nodi e $L (\geq 3)$ rami si possono scrivere N eq lineari tra le correnti nei rami. Solo $N-1$ sono indipendenti perché ogni corrente di un ramo va sempre da 2 nodi

Ho L incognite e $N-1$ eq

$$M = L - (N-1) = L - N + 1$$

correnti indipendenti e dunque M maglie indipendenti

ESERCIZIO

Risolvere la seguente rete trovando le correnti e la potenza erogata dal generatore.

$\mathcal{E} = 18\,V$

$R_1 = 12\,\Omega$

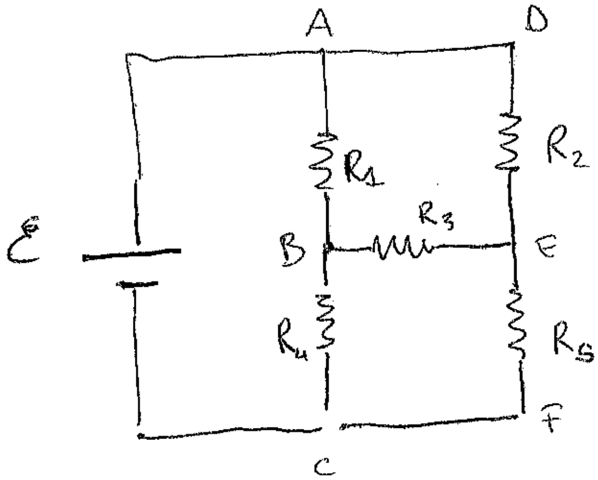
$R_2 = 2\,\Omega$

$R_3 = 6\,\Omega$

$R_4 = 4\,\Omega$

$R_5 = 2\,\Omega$

R_{int} trascurabili

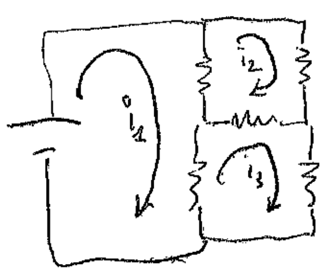


4 NODI : A, B, C, E (N)

6 RAMI AB, BC, BE, AE, CE, AC (L)

$M = L - N + 1 = 3$ MAGLIE

Stabiliamo i versi di percorrenza nelle maglie



$$\begin{cases} \mathcal{E} = R_1(i_1 - i_2) + R_4(i_1 - i_3) \\ 0 = R_2 i_2 + R_3(i_2 - i_3) + R_1(i_2 - i_1) \\ 0 = R_5 i_3 + R_3(i_3 - i_2) + R_4(i_3 - i_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(R_1 + R_4) - i_2(R_1) - i_3 R_4 = \mathcal{E} \\ (R_1 + R_2 + R_3) i_2 - R_1 i_1 - R_3 i_3 = 0 \\ (R_3 + R_4 + R_5) i_3 - R_4 i_1 - R_3 i_2 = 0 \end{cases}$$

Svolgendo il sistema

$i_1 = 5.74\,A$ $\quad$ $i_2 = 4.73\,A$ $\quad$ $i_3 = 4.28\,A$

La corrente che circola nelle singole resistenze vale

$i(R_1) = i_1 - i_2 = 1.01\,A$

$i(R_2) = i_2$

$i(R_3) = i_2 - i_3 = 0.45\,A$

$i(R_4) = i_1 - i_3 = 1.46\,A$

$i(R_5) = i_3$

il generatore eroga una potenza

$P_{gen} = \mathcal{E}\, i_1 = 103.3\ W$

La resistenza eq vista dal generatore

vale $R_{eq} = \mathcal{E}/i_1 = 3.14\,\Omega$

che non può essere ottenuta da nessuna

operazione di serie e parallelo sulle singole

resistenze