CAPACITÀ E CONDENSATORI

- La carica in eccesso in un conduttore è distribuita sulla sua superficie.
- ~~Questa~~ distribuzione di carica superficiale è tale da rendere nullo il campo elettrico E all'interno del conduttore e costante il potenziale V

$$q = \int \sigma(x', y', z') \, d\Sigma$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma(x', y', z') \, d\Sigma}{r'}$$

Se aumento la carica moltiplicandola per un fattore k

$$q' = kq$$

$$\sigma' = k\sigma$$

$$V' = kV$$

Allora il rapporto $\frac{q}{V} = C$ detta capacità del conduttore è costante e dipende dalla geometria del conduttore e dal mezzo che lo circonda

Un sistema costituito da due conduttori tra i quali ~~di~~ c'è induzione completa è detto <u>condensatore</u>

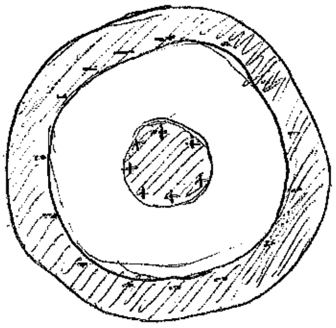
I due conduttori sono detti armature del condensatore

Il rapporto tra il valore assoluto della carica presente su una armatura e la differenza di potenziale tra le armature si chiama <u>capacità del condensatore</u>

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}$$

dipende dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto tra le armature

1) CONDENSATORE SFERICO



Considero 2 conduttori sferici concentrici di raggio R_1 e R_2 con $R_1 < R_2$ e carica Q sulle armature

Considero una superficie sferica concentrica di raggio $R_1 < r < R_2$

Per il teorema di Gauss il campo elettrico tra le armature vale

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

La differenza di potenziale tra i due conduttori vale quindi

$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} E\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Dato che

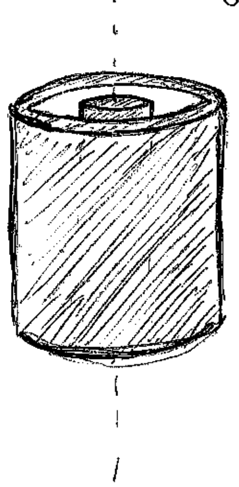
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

la capacità di un condensatore sferico è data

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

2) CONDENSATORE CILINDRICO

Considero 2 cilindri coassiali di raggi R_1 e R_2 $(R_1 < R_2)$ e di lunghezza l



Nella regione fra i due cilindri il campo elettrico vale

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

infatti:

$$\Phi(E) = 2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \longrightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

La differenza di potenziale tra le armature vale

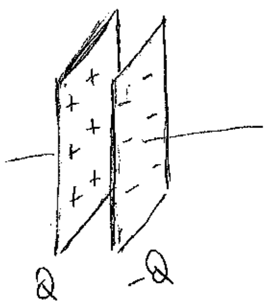
$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

dato che $\lambda = \frac{q}{l}$

$$\boxed{C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

3) CONDENSATORE PIANO

Considero 2 armature piane, parallele, di superficie S e poste a distanza d. Su ogni armatura è presente una carica Q.



La densità di carica su ogni armatura è pari a $\sigma = \frac{Q}{S}$ in modulo

Se $d \ll l$ posso trascurare gli effetti di bordo e il campo nella regione tra le armature vale

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

$$V_1 - V_2 = E\,d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,d$$

Quindi

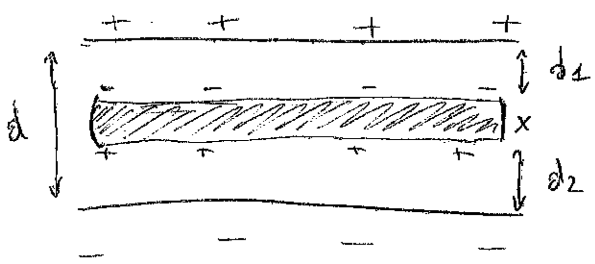
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\,d} \Rightarrow$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

ESERCIZIO

Le armature di un condensatore piano di capacità C_0 sono poste a distanza $d = 10$ cm.
Si vuole ottenere una variazione del 10% della capacità interponendo tra le armature una lamina conduttrice con facce parallele. Trovare lo spessore x della lamina.

Inserendo una lamina conduttrice tra le armature si crea un sistema di due condensatori in serie



$$d_1 + d_2 = d - x$$

Ogni condensatore ha capacità C_1 e C_2
La capacità totale C vale

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \Longrightarrow C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} \; \varepsilon_0 \frac{S}{d_2}}{\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} + \varepsilon_0 \frac{S}{d_2}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d_1 + d_2} = \varepsilon_0 \frac{S}{d - x}$$

ma C deve essere pari a $\frac{11}{10} C_0$

Quindi

$$\varepsilon_0 \frac{S}{d-x} = \frac{11}{10} \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$\frac{10}{11} = \frac{d-x}{d} = 1 - \frac{x}{d}$$

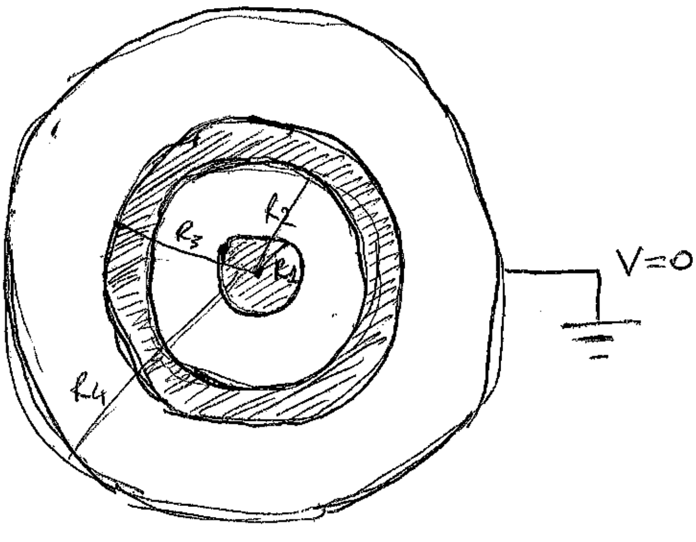
$$x = \frac{1}{11} d = 9.09 \; 10^{-3} \, m$$

ESERCIZIO

Una sfera metallica di raggio R_1 è posta al centro di una calotta sferica metallica di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3. Il tutto è racchiuso da una superficie sferica messa a terra di raggio R_4. Sulla sferetta si trova una carica $+Q$.

Trovare il potenziale nella sferetta nei due casi

1) Sfera esterna di raggio R_4 messa a terra
2) Sfera interna di raggio R_2 messa a contatto elettrico con la sferetta di raggio R_1



Il sistema equivale a una serie di 2 condensatori sferici

Il potenziale della sfera di raggio R_4 è nullo

CASO 1

$$\Delta V = V_{sfera} - V_{R_4} = V_{sfera} = \frac{Q}{C_{TOT}}$$

$$\frac{1}{C_{TOT}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

$\Longrightarrow$

$$V_{sfera} = Q \; \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$$

dove

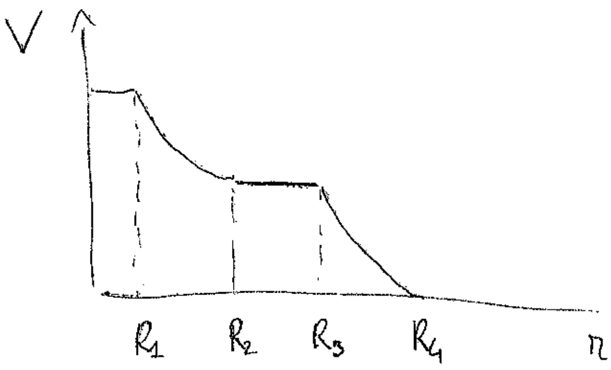
$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad e \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_3 R_4}{R_4 - R_3}$$

Sostituendo

$$V_{sfera} = Q \; \frac{\cancel{4\pi\varepsilon_0} \; \dfrac{R_1 R_2 (R_4 - R_3) + R_3 R_4 (R_2 - R_1)}{\cancel{(R_2 - R_1)(R_4 - R_3)}}}{(4\pi\varepsilon_0)^{\cancel{2}} \; \dfrac{R_1 R_2 R_3 R_4}{\cancel{(R_2 - R_1)(R_4 - R_3)}}}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{R_1 R_2 (R_4 - R_3) + R_3 R_4 (R_2 - R_1)}{R_1 R_2 R_3 R_4} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$



CASO 2

Se la sferetta e la sfera di raggio R_2 sono a contatto $\Rightarrow$ il condensatore di capacità C_1 si scarica

$$V_{sfera} = \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R_4 - R_3}{R_3 R_4}$$

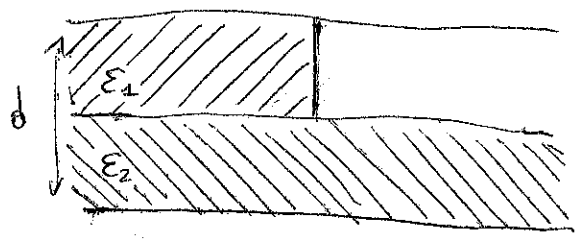
ESERCIZIO

Un condensatore a facce piane e parallele con area S a distanza d viene caricato. Tra le armature vengono inseriti 2 dielettrici come in figura

1) $\varepsilon_1 = 3$; $d/2$; $S/2$

2) $\varepsilon_2 = ?$; $d/2$; S

Trovare ε_2 sapendo che la ddp ai capi del condensatore si dimezza a causa dell'introduzione dei dielettrici



Osservo che essendo il condensatore isolato la carica sulle armature resta costante

$\Longrightarrow$

la ddp si dimezza

$$C V_0 = C_{TOT} V' = C_{TOT} \frac{V_0}{2}$$

quindi $C_{TOT} = 2C$ con $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d}$

La capacità finale C_{TOT} è data dalla serie di un condensatore C_2 con costante dielettrica ε_2 e spessore $\frac{d}{2}$ e di un condensatore C_A dato dal parallelo di un condensatore riempito col dielettrico 1 e l'altro vuoto ciascuno di area $S/2$.

$$C_{TOT} = \frac{C_A C_2}{C_A + C_2}$$

dove

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S}{d/2} \qquad C_A = \varepsilon_0 \frac{S/2}{d/2} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S/2}{d/2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\left(\varepsilon_0 \frac{S}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S}{d}\right) 2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S}{d}}{\varepsilon_0 \frac{S}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{S}{d} + 2 \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{S}{d}} = 2C = 2 \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$\frac{\left(\varepsilon_0 \cancel{\frac{S}{d}} + \varepsilon_0 \varepsilon_1 \cancel{\frac{S}{d}}\right) \cancel{2} \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} = \cancel{2} \varepsilon_0 \cancel{\frac{S}{d}}$$

$$\frac{2\varepsilon_2 (1 + \varepsilon_1)}{1 + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} = 1$$

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_1 = 1 + \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 (\varepsilon_1 - 1) = 1 + \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 1} = 2$$