

ESERCIZIO

All'interno di una sfera di raggio $R = 0.584 \text{ m}$ è distribuita una carica elettrica con densità volumetrica $\rho = \kappa/r$, dove $\kappa = 7.53 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ e r è la distanza dal centro.

Calcolare:

- 1) La carica elettrica contenuta all'interno della sfera.
- 2) Il campo E nei punti a distanza $R_1 = R/2$ e $R_2 = 2R$.
- 3) Il potenziale nel centro della sfera.
- 4) L'energia elettrostatica della distribuzione di carica.

- 1) Un guscio sferico di spessore infinitesimo contenente la carica dq

$$dq = \rho dV = \frac{\kappa}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi \kappa r dr$$

quindi

$$q = \int dq = 4\pi \kappa \int_0^R r dr = 2\pi \kappa R^2 = 6.98 \cdot 10^{-3} \text{ C}$$

- 2) Appliciamo Gauss

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

per $R = R/2$

$$4\pi \frac{R^2}{4} E = \frac{4\pi \kappa}{\epsilon_0} \int_0^{R/2} r dr = \frac{4\pi \kappa}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{4} \rightarrow \vec{E} = \frac{\kappa}{2\epsilon_0} \hat{r}$$

$$E(R/2) = 4.25 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$

Calcoliamo ora analogamente $E(2R)$

$$4\pi(4R^2) E = \frac{4\pi k}{\epsilon_0} \int_0^R r dr$$

$$E(2R) = \frac{k}{8\epsilon_0} = 1.06 \text{ V/m}$$

NB: $E(r > R)$ non è costante ma vale

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{tot}} = \frac{1}{\epsilon_0} 2k\pi R^2$$

\Rightarrow

$$E(r) = \frac{k R^2}{2\epsilon_0 r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

3) Calcoliamo il potenziale in zero considerando il campo dentro e fuori dalla sfera

$$V_0 = - \int_{\infty}^{R=0} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_R^0 E dr - \int_{\infty}^R E dr$$

$$= \frac{kR}{2\epsilon_0} + \frac{kR^2}{2\epsilon_0 r} \Big|_{\infty}^R = \frac{kR}{\epsilon_0} = 3.27 \cdot 10^8 \text{ V}$$

4) L'energia elettrostatica e' data da

$$U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

integrato su tutto il volume in cui $E \neq 0$
avremo quindi 2 contributi:

Dentro la sfera $\rightarrow E^{(IN)} = \frac{k}{2\epsilon_0}$

Fuori dalla sfera $\rightarrow E^{(OUT)} = \frac{k}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^{(IN)2} V_{sfera} + \int_R^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{k^2 R^4}{4\epsilon_0^2 r^4} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{k^2}{4\epsilon_0^2} \frac{4\pi R^3}{3} + \int_R^{\infty} \frac{k^2 R^4 \pi}{2\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{k^2 \pi R^3}{6\epsilon_0} + \frac{k^2 \pi R^3}{2\epsilon_0} = \frac{2}{3} \frac{k^2 \pi R^3}{\epsilon_0} = 7.59 \cdot 10^5 \text{ J}$$

ESERCIZIO

Una sfera di raggio $r_1 = 5 \text{ cm}$ è uniformemente carica con carica $q = 7 \cdot 10^{-8} \text{ C}$.

Su un guscio sferico concentrico di spessore trascurabile e raggio $r_2 = 10 \text{ cm}$ è distribuita una carica $-q$.

Trovare:

1) La differenza di potenziale tra un punto sulla superficie della sfera e un punto sulla superficie del guscio.

2) L'energia elettrostatica del sistema

Calcoliamo il campo tra la sfera e il guscio con il teorema di Gauss

$$r_1 < r < r_2$$

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} q \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\Delta V = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{r_2}^{r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] =$$

$$= 625 \text{ V}$$

Per trovare l'energia elettrostatica del sistema occorre conoscere il campo in tutto lo spazio.

Quello fuori dal guscio è nullo per il teorema di Gauss, quindi resta da determinare quello all'interno della sfera

$r < r_1$

$$4\pi E r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho dr' \quad \text{con } \rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r_1^3}$$

$$E = \frac{4\pi}{4\pi r^2 \epsilon_0} \rho \int_0^r r'^2 dr' = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

calcoliamo l'energia

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E^2 dV$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^{r_1} \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2} 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{4\pi\rho^2}{9\epsilon_0^2} \int_0^{r_1} r^4 dr + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\frac{4\pi\rho^2}{9\epsilon_0^2} \frac{r_1^5}{5} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right] =$$

substituamo

$$\rho^2 = \frac{q^2}{\frac{16 \pi^2 r_1^6}{9}}$$

$$U = \frac{2\pi}{45\epsilon_0} \left(\frac{9q^2}{16\pi^2 r_1^6} \right) r_1^5 + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{q^2}{40\epsilon_0\pi r_1} + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) =$$

$$= 3.09 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$